Matematika ir jos reikšmė Lietuvos mokslui bei kultūrai

Rimas Norvaiša

Įvadas

Apie šiuolaikinę matematiką visuomenė arba nieko nežino, arba tos žinios yra stereotipai. Šiuo požiūriu Lietuvos visuomenė nėra išimtis. Pasaulyje matematika dažnai vadinama kultūros anatema, akląja dėme, svetima žeme, nematoma kultūros dalimi ir t. t. Tuo tarpu pastarojo šimtmečio matematikų laimėjimai ir matematikos vystymosi tempai yra stulbinantys. Vokiečių poetas, eseistas ir intelektualas Hansas Magnusas Enzensbergeris 1998 m. Tarptautiniame matematikos kongrese kalbėjo, kad

> *šiuolaikiniai pasiekimai šioje [matematikos] srityje yra bet kuriuo atveju įspūdingi. Bijau, kad vaizduojamieji menai, literatūra ir teatras savo pasiekimais nėra tokie sėkmingi.* [Enzensberger; 1999, p. 31]

Savo pranešime jis nurodė daug priežasčių, kodėl matematika visuomenėje tapo izoliuota sritimi. Svarbiausia tarp jų yra matematikos mokymo problemos visais lygmenimis ir ypač pradiniu. Jo žodžiais tariant, išmokyti aritmetikos mechaniškai įsimenant yra viskas, ko tikimasi mokant moksleivius, užuot skatinus abstraktųjį mąstymą tuo žmogaus amžiaus laikotarpiu, kai tai daryti lengviausia.

Įdomu tai, kad panašūs visuomenės ir matematikos santykiai nėra tik šio laikmečio bruožas. Štai žodžiai, kuriais Viktoras Biržiška pradeda savo 1952 m. publikuotą straipsnį apie matematiką (kalba nekeista):

> *Beveik kiekvienos tautos visuomenės sluoksniuose (lietuviškoji inteligentija nėra, deja, šiuo atveju jokia išimtis) yra paplitusi keista, perdėm klaidinga pažvalga į matematiką. Matematika laikoma slaptu, prieinamu tik rinktiniams žmonėms mokslu, kuriame viskas jau galutinai susikristalizavę, kuriame nebelikę jokios neišspręstos problemos, jokio atviro, laukiančio dar išsprendimo klausimo, ir kuriame todėl nebesanti įmanoma jokia raida. Savo absoliučią matematikos ignoranciją visuomenė įrodo apsčiai paplitusiais, nors ir tokiais posakiais: „didesnioji pusė, mažesnioji pusė“, „pirmų pirmiausia“ ir panašiai. Visose tose nesąmonėse, kurias visuomenė prikergia matematikai, dažnai atsispindi neigiamieji įspūdžiai, gauti iš mokyklinio suolo: silpni, neprityrę matematikos mokytojai sugeba savo mokinių tarpe įdiegti net neapykantą matematikai, perkėlę jos svorio centrą į matematiškąsias formulas. Eilinis aštuntosios klasės gimnazijos mokinys, paklaustas, kas yra matematika, geriausiu atveju tesugeba atsakyti: „tai yra aritmetika, algebra,*

geometrija ir trigonometrija" – o matematikos esmė lieka jam visai svetima ir nesuprantama. Koks gi, galop, per mokslas ta matematika, kas sudaro matematikos esmę? [Biržiška; 1952]

Mūsų nuomone, visuomenė nesidomi šiuolaikine matematika ne tik todėl, kad tam domėjimuisi neturi būtino mokyklinio pasirengimo. Kita priežastis, matyt, yra tai, kad visuomenė nejaučia turėsianti iš tokio žinojimo apčiuopiamos naudos. Ne veltui apie matematikus pasakojamas toks anekdotas:

Virš jūros oro balionu skrenda Šerlokas Holmsas ir daktaras Vatsonas. Netikėtai užėjęs rūkas sutrukdė keliauninkams orientuotis. Po kurio laiko baliono apačioje pasirodė žemė. Ji buvo visai netoli ir ten stovėjo žmogus. Daktaras Vatsonas sušuko jam: „Kur mes esame?". Žmogus, šiek tiek pagalvojęs, atsakė: „Jūs esate savo balione". Šerlokas Holmsas tarė: „Šis žmogus – matematikas". Vatsono paklaustas, kodėl jis taip mano, Holmsas atsakė: „Pirma, prieš atsakydamas žmogus galvojo, antra, jo atsakymas absoliučiai teisingas, ir, trečia, jo atsakymas visiškai bevertis".

Taigi anekdoto mintis tokia: matematika, nors ir būdama kritinio mąstymo etalonas, neturi jokios praktinės naudos. Manome, kad tai gryna tiesa: praktinėje, ūkinėje ar kitokioje panašioje veikloje šiuolaikinė matematika yra bevertė. Kodėl šiuolaikinė visuomenė vertina tik praktinę naudą, galėtų būti kitos diskusijos tema. Lietuvoje visuomenės požiūrį į šiuolaikinę matematiką taip pat iliustruoja tokie dažnai sakomi mitai apie matematiką:

- matematika yra mokslas apie gamtą;
- matematika yra mokslas apie dydžius, gaunamus apibendrinant realaus pasaulio esmines savybes;
- matematika yra kiekybiškai nusakomas pažinimas;
- matematinė veikla yra mechaniškas formalių taisyklių taikymas;
- atsiradus kompiuteriams, matematikams nebėra kas veikti;
- numerologija yra matematikos filosofija ir t. t.

Visame pasaulyje mitai apie šiuolaikinę matematiką nėra neįprastas dalykas. Apie tai retkarčiais parašoma. Pavyzdžiui, savo straipsnyje Crowe [1988] išvardija ir bando paneigti 10 nesusipratimų apie matematiką ir jos istoriją. Sukurtos interneto svetainės, kuriose bandoma rašyti apie šiuolaikinę matematiką (http://www.matematika.lt) ir jos įtaką kultūrai (http://www.thalesandfriends.org/en).

Šioje apžvalgoje pagrindinis dėmesys skiriamas šiuolaikinės matematikos apibūdinimui ir jos svarbiausių bruožų išryškinimui. Joje remiamasi pačių matematikų apmąstymais apie matematikos praktiką. Taip pat remtasi pastarojo dešimtmečio matematikos istorikų darbais, kurie radikaliai pakeitė ankstesnį požiūrį į šiuolaikinę matematiką ir jos santykį su gamtos mokslais. **Svarbiausia naujai įsisąmoninta pastarojo šimtmečio matematikos savybė yra jos savarankiškumas; joje dominuoja problemos, kylančios pačioje matematikoje ir niekaip nesusijusios su realiu pasauliu ir netgi su kitais mokslais** [Gray; 2008, p. 2 ir 20]. Šia prasme matematika skiriasi nuo visų kitų mokslų ir filosofijos. Realaus pasaulio „atspindėjimo" ignoravimas paaiškina matematikams būdingą siekimą griežtinti matematinio įrodymo standartus. Gali skambėti paradoksaliai, bet toks matematikos atsietumas nuo realybės padarė ją dar labiau naudingesne mokslui ir svarbia kultūrai.

Apie matematiką kaip mokslo ir kultūros reiškinį yra labai daug literatūros anglų kalba. Šio rašinio literatūros sąrašą sudaro tik cituojami darbai ir jis jokiu būdu neatspindi esančios bibliografijos apie matematiką. Pavyzdžiui, beveik nieko nekalbama apie matematikos filosofiją. Norint susidaryti apytikrį vaizdą apie šiuolaikinę matematiką galima būtų rekomenduoti išsamią, 1034 puslapių enciklopedinę apžvalgą *The Princeton Companion of Mathematics* [Gowers; 2008]. Matematikos istorijai skirtas fundamentalus Kline darbas [1972]. Tarp svarbiausių pastarojo dešimtmečio matematikos istorijos darbų paminėsime Ferreirós [2007], Laugwitz [2008] ir Gray [2008].

Matematikos pokyčiai: sąvokomis grindžiama matematika

Matematika visada buvo ir yra mokslas apie sąvokas. Tačiau taip ji nebuvo apibūdinama, nes buvo galima pasakyti suprantamiau. Pavyzdžiui, matematika yra mokslas apie diskrečius ir tolydžius dydžius, nagrinėjamus aritmetikoje ir geometrijoje. Apibūdinimas naudojant tris konkrečias sąvokas (*diskretumas*, *tolydumas*, *dydis*) yra patogesnis sąvokų kiekio prasme. Kita vertus, tos trys sąvokos nėra aiškios, bent jau šių dienų požiūriu. Dydžio sąvoka yra plačiai naudojama Euklido (apie 365–300 pr. Kr.) *Pradmenyse*, bet jos prasmė ten neaiškinama, matyt, todėl, kad tada ji nekėlė neaiškumų. Ne mažiau problemiškos yra ir pirmosios dvi sąvokos. Dar daugiau, prieštara tarp *diskretaus* ir *tolydaus* buvo ir išlieka vienu įkvėpimo šaltinių matematikoje. Tai atspindi toliau aptariama matematinio kontinuumo sampratos evoliucija.

Sąvokų *diskretus*, *tolydus* ir *dydis* neaiškumas, matyt, kyla dėl to, kad dabar mes toms sąvokoms suteikiame papildomų prasmių nei anksčiau ir yra visai kitokie supratimo kriterijai. Visai dar neseniai niekas gal ir neabejojo, kad matematikos sąvokos yra realių daiktų ir reiškinių abstrakcijos, o intuityvus to suvokimas yra pakankamas pagrindas supratimui.

Pradedant 17 a. į matematikos tyrimų lauką patenka naujos sąvokos: *kitimas* (*judėjimas*), *erdvė* ir *struktūra*. Matysime, kad matematikos vystymąsi atspindi šių sąvokų supratimo lygis. Istorinė tyrimų apžvalga yra pateikta straipsnyje apie matematiką *Visuotinėje lietuvių enciklopedijoje* [Norvaiša; 2008]. Be abejonės, šių sąvokų tyrimą paskatino žmogaus siekimas pažinti gamtą ir save. Matyt, todėl jos nebuvo suvokiamos atsietai nuo realybės tiek, kiek matematikoje buvo įprasta remtis intuicija. Panašios sąvokos nagrinėjamos ir kitų mokslų, tik kitais metodais. Šiame rašinyje siekiama parodyti, kaip šiuolaikinė matematika iš esmės pakeitė savo vaidmenį kaupiant žinias apie realųjį pasaulį, nebesirūpindama nagrinėjamų sąvokų atitikimu realiai tikrovei, o intuiciją, kaip supratimo įrankį, keisdama įrodymo griežtumo tobulinimu. Vis dėlto, paradoksalu, kad kiti mokslai tapo dar labiau priklausomi nuo matematikos tyrimų rezultatų.

Kas yra sąvoka? Sąvoka yra pažinimo vienetas, kurį sudaro tam tikras požymių (savybių) derinys. Požymių, sudarančių sąvoką, rinkinys vadinamas *sąvokos intensija* – tai sąvokos turinys. Objektų, kurie atitinka sąvoką visuma, vadinama *sąvokos ekstensija* – tai sąvokos apimtis. Tradicinėje logikoje iki 19 a. sąvoka buvo svarbiausias logikos elementas. Tai reiškė, kad samprotavimas buvo sąvokų formalaus jungimo rezultatas. *Sąvokos* sampratos formavimosi pradžia siejama su Vakarų filosofijos pradžia, kuri savo žinojimo (angl. *knowledge*) teorijoje sąvokai ir idėjai teikė pirmenybę. Šiais laikais *sąvoka* (arba *konceptas*) naudojama kitomis prasmėmis kognityviniuose moksluose ir psichologijoje. Sąvokos vystymosi istoriją matematikos ir logikos kontekste trumpai apžvelgia Ferreirósas [1996, 2.1 skyrelis].

Matematikos sąvokos apibūdinimo sunkumus lemia jų abstraktumas; nėra galimybės nurodyti reiškinį ar vaizdinį, kurio pakaktų matematikos sąvokai apibūdinti. Pavyzdžiui, skaičiaus sąvoka: kokie yra skaičiaus požymiai, vienareikšmiškai apibrėžiantys skaičiaus sąvoką? Jei tarsime, kad žmogui iš prigimties ar dėl kitų priežasčių yra žinoma, kas yra vienas, du, trys, ir t. t., tai šie objektai sudaro sąvokos *natūralusis skaičius* ekstensiją. Tokiu atveju ekstensija apibrėžia sąvokos intensiją, nes nežinant, kas yra vienas, du, trys ir t. t., nebūtų galima numanyti, ką reiškia natūralusis skaičius. Tačiau 19 a. matematikoje subrendo poreikis nustatyti tokius skaičiaus požymius, kurie vienareikšmiškai apibūdintų natūraliojo skaičiaus sąvokos intensiją, be nuorodos į intuiciją. Beveik vienu metu ir skirtingu būdu šią problemą išsprendė G. Frege (1848–1925) ir R. Dedekindas (1831–1916).

Verta pastebėti, kad *sąvoka* aptariamąja prasme ir *aibės* samprata matematikoje turi esminių panašumų: aibė atitinka sąvokos ekstensiją, nes abi jos yra elementų rinkiniai, sudaryti pagal tam tikrus požymius, o aibę apibrėžiančių savybių derinys atitinka sąvokos intensiją. Savo darbe Ferreirósas [1996] parodo, kad šis panašumas nėra atsitiktinis; dėl to „kalti“ ir didžiausią įtaką pokyčiams matematikoje turėjo B. Riemannas (1826–1866) ir R. Dedekindas. Ne mažiau aiškiai sąvokas su aibėmis siejo B. Bolzano (1781–1848) ir G. Frege, bet jų darbai padarė mažesnę pradinę įtaką, nes buvo nežinomi to meto matematikų bendruomenei.

Ką konkrečiai reiškia, kad šiuolaikinė matematika yra mokslas apie sąvokas? Matematikoje išimtinai nagrinėjamos sąvokos, kurių ekstensiją sudaro kitos sąvokos, o ne realios tikrovės objektai. Sąvokų tyrimas reiškia santykių tarp skirtingų sąvokų nustatymą. Paprastai tai daroma logikos priemonėmis parodant, kad iš sąvoką apibrėžiančių savybių išplaukia kitą sąvoką apibrėžiančios savybės. Pavyzdžiui, teisingas teiginys: kiekviena diferencijuojama funkcija yra tolydi funkcija. Šiuo atveju *diferencijuojamos funkcijos* sąvoka palyginama su *tolydžios funkcijos* sąvoka. Ne bet kokios sąvokos nagrinėjamos matematikoje. Negana to, kad sąvokų intensija privalo būti neprieštaringa, o ekstensija netuščia, šiuolaikinėje matematikoje nagrinėjamų sąvokų pasirinkimą lemia pačios matematikos raidos tendencijos, joms paprasčiausiai gali daryti įtaką estetiniai ar vidinės harmonijos kriterijai. Sąvokos pasirinkimą tyrimui gali lemti ir taikomojo pobūdžio motyvai, bet jie nebėra dominuojantys, kaip anksčiau. Toliau žodžiais *matematinė sąvoka* žymėsime tik tas sąvokas, kurios yra matematikos tyrimo objektai.

Matematika ne visada buvo tokia, kaip čia apibūdinta – greičiau buvo kitokia. Tai iliustruosime funkcijos sąvokos evoliucijos pavyzdžiu. Ne visai griežtai sakoma, kad funkcija f iš aibės A į aibę B yra *taisyklė*, kuri kiekvienam aibės A elementui x priskiria vienintelį aibės B

elementą, žymimą $f(x)$. Taip sakant reikėtų apibrėžti, kas yra taisyklė. Tačiau neproblemiškais atvejais matematikoje stengiamasi siekti paprastumo ir visiško griežtumo pusiausvyros. Laikantis matematinio griežtumo reikalavimų, funkciją galima apibrėžti arba kaip tam tikrą Descarteso sandaugos $A \times B$ poaibį, arba aksiomiškai, kaip tai daroma kategorijų teorijoje.

Taip apibrėžta funkcijos sąvoka pradėta naudoti tik 19 a. antroje pusėje, kai atsirado *aibės* sąvoka, grindžiama *realiojo skaičiaus* sąvoka, skirtinga nuo skaičiaus kaip taško ant tiesės sampratos [Laugwitz; 2008, p. 211]. Tokį *funkcijos* sąvokos apibrėžimą lėmė tai, kad dvi funkcijos f ir g iš aibės A į aibę B yra lygios tada ir tik tada, kai funkcijos reikšmės $f(x)$ ir $g(x)$ yra lygios kiekvienai argumento reikšmei x iš A. Ši funkcijos savybė tapo labai svarbi tiriant galimą funkcijos reiškimą eilute (begaline suma).

Funkcijos sąvokos atsiradimas siejamas su I. Niutono (I. Newton, 1646–1727) ir G. Leibnizo (1646–1716) darbais apibūdinant judėjimą (arba kitimą) matematiškai. Šie darbai žymi diferencialinio ir integralinio skaičiavimo kūrimo pradžią. Tuo metu, 17 a., buvo kalbama apie kintamuosius ir apie tai, kaip kintant vienam kintamajam kinta kitas kintamasis. Šią savybę atitinkanti sąvoka buvo vadinama *kreive* (ne *funkcija*). Tik L. Euleris (1707–1783) kreivės sąvokai suteikė funkcijos formą, tačiau žymiai siauresne prasme už tą, kuri naudojama dabar. 1748 m. savo knygoje *Introductio in analysis infinitorum* funkciją apibrėžia kaip *išraišką*, teigdamas, kad

> *kintamo skaitinio dydžio funkcija yra analizinė išraiška, tam tikru būdu sudaryta iš kintamų skaitinių dydžių ir konkrečių skaičių arba pastovių skaitinių dydžių* (cit. pagal [Laugwitz; 2008, p. 197]).

Paprasčiau kalbant funkcija laikomas tik formulės išraišką turintis reiškinys, pavyzdžiui, polinomas.

Perėjimą nuo išraiškos prie funkcijos Sørensenas [2002] laiko paradigminiu pokyčiu matematikoje T. Kuhno prasme ir 18 a. laikotarpį iki 1820 m. vadina *formulėmis grindžiama matematika* (angl. *formula based mathematics*). Jis rašo:

> *Matematikoje formulė buvo kartu ir rezultatas, ir metodas, o matematiko mąstyme formulė buvo kartu ir objektas, ir priemonė. Matematikos rezultatas buvo gaunamas formaliai manipuliuojant išraiškomis (formulėmis), o rezultatas vėlgi buvo nauja formulė. [....] formulė buvo pagrindinis matematikos objektas ir tik palaipsniui tapo kitokio pobūdžio objekto išraiška.* [Sørensenas; 2002, p. 2]

Skirtumą tarp dabartinės funkcijos sampratos ir išraiškos gerai iliustruoja viduriniųjų reikšmių teorema. Šiuolaikiniame matematinės analizės kurse ši teorema formuluojama taip: jei uždarame realiųjų skaičių intervale $[a, b]$ apibrėžta funkcija f su reikšmėmis realiųjų skaičių aibėje yra tolydi ir jei nulis yra tarp $f(a)$ ir $f(b)$, tai egzistuoja toks skaičius $c \in [a, b]$, kad $f(c) = 0$. Dėl funkcijos skirtingos sampratos, L. Euleris ir jo amžininkai šią teoremą formulavo tik polinomams. Tuometinis teoremos įrodymas reiškė reikalavimą parodyti, kad polinomas turi sprendinį. (Toks faktas dabar vadinamas *fundamentaliąja algebros teorema* ir jos pirmasis įrodymas priskiriamas C. F. Gaussui 1799 m.) Pastarasis įrodymas buvo grindžiamas tuo metu akivaizdžiu laikomu faktu, kad dvi „tolydžios“ kreivės privalo turėti sankirtos tašką, jei viena iš jų turi taškų, esančių abiejose kitos kreivės pusėse.

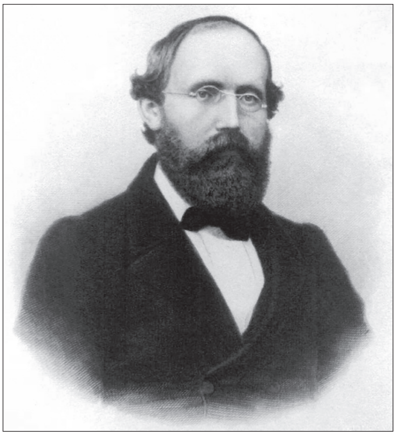
Pastarasis argumentas iliustruoja, kaip geometrijos vaizdiniai ir intuicija buvo naudojami matematiniame įrodyme. Funkcijos, kaip išraiškos, tolydumas 17 a. reiškė visai ką kita nei šiandienėje matematikoje. Buvo sakoma, kad išraiška yra tolydi, jei ją sudaro viena formulė; priešingu atveju išraiškos, kurioms užrašyti reikėjo kelių formulių, buvo vadinamos *trūkiomis*. Tuo tarpu savybė, atitinkanti tolydumą šiuolaikine prasme, reiškė tai, kad funkcijos grafikas neturi trūkių – vėlgi apeliacija į geometrinę intuiciją. Be to, buvo paplitusi nuomonė, kad nėra prasmės nagrinėti netolydžių šiandiene prasme funkcijų, nes tokių realiame pasaulyje nėra.

Gerokai griežtesnį viduriniųjų reikšmių teoremos įrodymą pirmieji pasiūlė B. Bolzano ir A. L. Cauchy (1789–1857) [Dunham; 2005, p. 80–83]. Abu įrodymai rėmėsi funkcijos tolydumo sąvoka šiuolaikine prasme, kuri jau nenaudojo geometrinės intuicijos, bet dar buvo formuluojama žodžiais. Dabar studentams puikiai žinoma „ε-δ kalba“, pradėta naudoti įrodymuose kitame A. L. Cauchy veikale *Calcul infinitésimal*, o K. Weierstrassas (1815–1897) pradėjo naudoti „ε-δ kalbą“ sąvokų apibrėžtyse. Iš tiesų, Cauchy savo garsiajame analizės kurse [1821] dar neskyrė tolydžiosios funkcijos nuo diferencijuojamosios. Vis dėlto abiejuose įrodymuose buvo atsisakyta išraiškų naudojimo formuluojant viduriniųjų reikšmių teoremą bet kuriai tolydžiajai funkcijai.

Dar svarbiau buvo tai, kad funkcijos kaip išraiškos supratimas tapo kliūtimi nagrinėjant jau minėtą J. Fourier (1768–1830) eilučių (begalinių sumų) konvergavimą [Laugwitz; 2008, 2.2.3 skyrelis]. Priminsime, kad 19 a. pradžioje J. Fourier suformulavo idėją, kad bet kuri funkcija yra išreiškiama eilute paprastų funkcijų, pavyzdžiui, trigonometrinių funkcijų eilute. Natūralu, kad šio uždavinio sprendimas priklauso nuo funkcijos sampratos. Įdomu tai, kad dauguma toliau aptariamų 19 a. svarbiausių matematikos laimėjimų buvo gauti siekiant išspręsti šią J. Fourier eilučių konvergavimo problemą.

Jau minėtas Sørensenas [2002; p. 3] formulėmis grindžiamos matematikos paradigmos antiteze laiko paradigmą, kurią jis vadina *sąvokomis grindžiama matematika* (angl. *concept based mathematics*). Taigi čia aptariama šiuolaikinė funkcijos samprata yra sąvokos pavyzdys, iliustruojantis bendrą matematikos tyrimų pokytį. Susijusiomis sąvokomis yra tolydžioji funkcija, diferencijuojamoji funkcija ir panašiai. Perėjimas prie sąvokomis grindžiamos matematikos reiškė žymų pokytį matematikos objekto sampratoje. Naujoje sampratoje matematikos objektu tampa sąvokos ekstensija, t. y. kitų sąvokų rinkinys, turintis bendrą požymių rinkinį – intensiją. Sąryšiai tarp sąvokų reiškė sąryšius tarp sąvokų ekstensijų. Pavyzdžiui, teiginys, kad kiekviena diferencijuojamoji funkcija yra tolydi, reiškė, kad diferencijuojamųjų funkcijų sąvokos ekstensija yra dalis tolydžiųjų funkcijų sąvokos ekstensijos. Toks perėjimas reiškė daug naujų aspektų matematiniuose samprotavimuose, kuriuos Sørensenas [2002] detaliai apžvelgia N. Abelio (1802–1829) darbų kontekste.

Kalbant apie funkcijos sąvokos evoliuciją reikia pabrėžti, kad iki 19 a. funkcija išreiškė tik realaus pasaulio sąryšius. Todėl buvo manoma, kad tik tolydžiosios funkcijos turėjo prasmę – aiškinant tuo,



Bernhardas Riemannas (1826–1866)

kad fiziniai objektai niekur nedingsta ir iš nieko neatsiranda. Šio funkcijos tiesioginio siejimo su realiuoju pasauliu aiškiai ir sąmoningai atsisako B. Riemannas ir tokiu būdu praveria duris į matematikos atsiskyrimą nuo gamtos mokslų, tuo metu dar vadinamų Gamtos filosofija.

Savo paskaitose 1854 m., skirtose geometrijos pagrindams, B. Riemannas naudoja naują sąvoką – *daugdara* (vok. *Mannigfaltigkeit*; angl. *manifold*) – kaip priemonę gilesniam geometrijos ir jos aksiomų supratimui. Šiuolaikinėje matematikoje daugdarai suteikiama kita prasmė. Ferreiróso [1996; p. 22] analizė rodo, kad Riemanno daugdara buvo tarpinė sąvoka tarp jau minėtos matematikai fundamentalios, bet miglotos, dydžio sąvokos ir sąvokos ekstensijos, iš esmės sutapdama su pastarąja. Daugdara, kaip ir dydis, buvo abstraktus objektas. Tačiau daugdaros apibrėžimas siejamas su logika, skirtingai nuo dydžiui aiškinti naudojamo abstrahavimo proceso ir apeliacijos į geometrinę-erdvinę intuiciją. Kitaip tariant praktinė, su realia tikrove susijusi intuicija keičiama logine intuicija. B. Riemannui daugdara buvo priemonė pagrįsti naujam jo įvestam matematikos objektui – Riemanno paviršiui, kurio buvo neįmanoma interpretuoti to meto trimatės geometrinės *erdvės* sampratos kontekste. Iš esmės daugdara tapo šiuolaikinėje matematikoje naudojamos *aibės* sampratos prototipu.

Pagal analogiją su dydžiu B. Riemannas kalbėjo apie diskrečiąsias ir tolydžiąsias daugdaras. Pirmoji iš šių sąvokų buvo siejama su skaičiais, o antroji – su geometrija. B. Riemannas teigė (Ferreirós [1996; p. 23]), kad su bet kuriuo objektu galima susieti sąvoką, kuri tokiu būdu tampa matematikos objektu. B. Riemanno požiūrį į sąvokas iliustruoja jo žodžiai: *gamtos mokslai yra bandymas suprasti Gamtą naudojant tikslias sąvokas* (Ferreirós [1996; p. 10]). Tai rodo, kad B. Riemannas matematiką laikė savarankiška žinių sistema, tiesiogiai nepriklausoma nuo patirties, bet kartu su gamtos mokslais naudojama tai patirčiai interpretuoti.

Tolesnė *aibės* sampratos evoliucija susijusi su R. Dedekindo darbais. 1888 m. R. Dedekindo straipsnyje *Was sind und was sollen die Zahlen*? (Kas yra skaičiai ir kuo jie turėtų būti?) apibrėžiami natūralieji skaičiai naudojant šiuolaikine prasme įprastą *aibės* sampratą ir funkcija tarp aibių, kuri pirmą kartą traktuojama kaip lygiavertis matematinis objektas. Be kitų dalykų, jis pirmą kartą apibrėžia begalinę aibę tiesiogiai: aibė X vadinama begaline, jei egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis tarp X ir kurio nors jos poaibio, nesutampančio su X; priešingu atveju X yra baigtinė. Iki tol begalinė aibė būdavo apibrėžiama kaip priešinga baigtinei. Skirtingai nuo B. Riemanno, R. Dedekindas minėtame ir kituose savo darbuose nebemini dydžio, sakydamas, kad aritmetika negali naudotis išorinėmis jai idėjomis, panašiomis į dydžio sampratą.

To priežastis yra griežtumo matematikai reikalavimas.

Ne mažiau svarbus R. Dedekindo indėlis keičiant matematikos vaidmenį atspindint Gamtą yra B. Riemanno nagrinėtos *tolydžiosios daugdaros* sampratos patikslinimas, kuris šiuolaikinėje matematikoje atitinka realiųjų skaičių aibės pilnumo savybę. Ši daugdaros ar aibės savybė taip pat kartais vadinama, atitinkamai, daugdaros ar aibės *kontinuumu*. Realiųjų skaičių aibės atveju kontinuumas yra aiškiai apibrėžtas terminas, tačiau taip nebūtinai yra, kai apie kontinuumą kalbama kitame kontekste, pavyzdžiui, intuityviame (fenomenologija).

Matematinis kontinuumas. Svarbiausiu laimėjimu siekiant matematinės analizės griežtumo ir tikslumo 19 a. buvo *realiojo skaičiaus* sąvokos apibrėžtis naudojant *aibės* ir *jos elemento* sampratas. Taip realiųjų skaičių aibė ir geometrinė tiesė tapo skirtingais matematikos objektais. Šios problemos istorijos pradžia yra tai, kad racionaliųjų skaičių nepakako geometriniams dydžiams matuoti – faktas, kuris buvo žinomas dar antikinėje Graikijoje kaip nebendramačių dydžių galimumas. Tiksliau, atkarpų A ir B ilgiai vadinami bendramačiais dydžiais, jei atsiras tokia atkarpa C, kad tiek į A, tiek į B ji telpa po sveiką skaičių kartų. Manoma, kad pitagoriečiai pirmieji teoriškai įrodė $\sqrt{2}$ iracionalumą, parodydami, kad vienetinio kvadrato įstrižainės ilgis nėra bendramatis su vienetu, t. y. savo kraštinės ilgiu. Šis faktas parodė, kad geometrinių dydžių tolydumas nėra išreiškiamas diskrečiais dydžiais – racionaliaisiais skaičiais. Kartais tai vadinama pirmąja matematikos krize. Siekdamas apibendrinti skaičiaus sąvoką tiek, kad jais galima būtų išreikšti geometrinius dydžius, senovės graikų matematikas Eudoxus sukūrė proporcijų teoriją, vertintiną kaip realiųjų skaičių pirmtaką.

Priešpriešа tarp diskretaus ir tolydaus atgimė 17 a., bandant matematiškai apibūdinti judėjimą. Kontraversiją išreiškė besikeičiantis požiūris į tai, kas yra be galo mažas dydis (angl. *infinitesimal magnitude*). Vieno požiūrio šalininkai teigė, kad be galo mažas dydis yra nedalomas kontinuumo elementas, panašus į Demokrito atomą, ir tokių dydžių yra be galo daug. Tai reiškia, kad tolydumą simbolizuojantis kontinuumas yra sudarytas iš diskrečių elementų. I. Niutono dėka be galo mažo dydžio samprata įgavo naują kokybę – galimybę būti kaip norimai mažu dydžiu. Palaipsniui kontinuumą, pavyzdžiui, tiesę, imta laikyti tolydaus kintamojo reikšmių sritimi taip tolydumui imant viršų prieš diskretumą.

Savo darbe *The Analyst* G. Berkeley [1734] parodė, kad be galo mažų dydžių sąvokų naudojimas nėra aiškesnis už teologijos dogmas. Jis tvirtino, kad matematikai nepateikė svarių argumentų naudojamoms procedūroms pateisinti, nors neneigė gaunamų rezultatų svarbos. Šis G. Berkeley darbas išprovokavo kontraversiją tarp matematikų, kurios pasekmė – pagrindinių prielaidų ir idėjų išryškinimas naujoje analizėje. Minėtoji A. L. Cauchy ribos samprata eliminavo be galo mažų dydžių naudojimą įrodymuose[1] .

Cauchy pasiūlyta *ribos* samprata kartu reiškė ir matematinio įrodymo kaitą ir ne tik atsisakant intuicija grindžiamo samprotavimo. Trumpai tariant, įrodymas iš esmės tapo kelių matematikos

1 Be galo mažiems dydžiams apie 1960 m. A. Robinsonas suteikė griežtą prasmę šiuolaikinės matematikos kontekste.

sąvokų palyginimas naudojant loginę dedukciją (išvedimą). Ji reiškia samprotavimą, sudarytą iš loginių teiginių, kuris skiriasi nuo samprotavimo, kai rezultatas gaunamas atliekant techninius skaičiavimus. Ne visada matematikos įrodymas buvo toks, koks jis yra dabar. Perėjimas nuo konkrečių matematikos išraiškų tyrimo prie sąvokų tyrimo žymėjo ir perėjimą nuo „skaičiuojamosios" matematikos prie „mąstymo" matematikos. Kaip principą šį pokytį įrodymuose skelbė vienas iš B. Riemanno mokytojų J. P. G. Dirichlet (1805–1859): sprendžiant problemą reikia minimizuoti aklą skaičiavimą ir maksimizuoti aiškų mąstymą [Gray; 2008, p. 67].

Matematikos pokyčiai 19 a. antroje pusėje paskatino atgimti logiką, kuri savo išsivystymu vis dar priminė Aristotelio laikus. Pagrindinė to meto loginė forma – silogizmas – negalėjo išreikšti svarbiausių matematikos teiginių, nusakančių egzistenciją ar visuotinumą. Dar svarbesnė buvo nuojauta, kad logika gali tapti matematikai tuo pagrindu, kuriuo iki tol buvo gamtos mokslai. Šią nuojautą su kaupu realizavo G. Frege (1848–1925), sukurdamas matematinės logikos pagrindus. Jo darbo tikslas buvo parodyti, kad *natūraliojo skaičiaus* sąvoką galima tiksliai apibrėžti naudojant vien tik logiką. Savo ruožtu jam teko sukurti logiką, kuri galėjo išreikšti visus aritmetikos teiginius. Tai jis atliko savo darbe *Begriffsschrift* (sąvokų kalba), kuris laikomas pačiu svarbiausiu kada nors parašytu logikos veikalu (Frege [1879]). Pavyzdžiui, iki tol logikoje naudotas subjekto ir predikato formas jis pakeitė funkcija ir jos argumentu. Dar svarbiau yra tai, kad Frege pradėjo naudoti egzistencijos ir visuotinumo kvantorius logikoje, ir taip leido išreikšti logine forma visus aritmetikos teiginius, tarp jų ir natūraliųjų skaičių indukciją. Frege planavo sąvokomis išreikšti ir realiuosius skaičius, tačiau šio darbo nebaigė dėl lemtingojo B. Russello (1872–1970) paradokso.

19 a. antroje pusėje keletas matematikų pasiūlė iš esmės du skirtingus realiųjų skaičių konstravimo būdus (Ch. Méray, E. Heine, R. Dedekindas, G. Cantoras). Konstrukcijos buvo motyvuojamos skirtingai formuluojamomis skaičių tolydumo (plyšių neturėjimo prasme) sampratomis. Pavyzdžiui, G. Cantoro (1845–1918) konstrukcija rėmėsi tokia realiųjų skaičių aibės savybe: realiųjų skaičių seka (x_n) konverguoja į realųjį skaičių tada ir tik tada, kai ji yra fundamentali, t. y. kiekvienam natūraliajam skaičiui K egzistuoja toks natūralusis skaičius N, kad sekos narių skirtumo modulis $|x_n - x_m| < 1/K$ kai $n > N$ ir $m > N$. Siekiant apibrėžti realiuosius skaičius pirmiausia yra nagrinėjama aibė visų fundamentaliųjų sekų, kurias sudaro racionalieji skaičiai. Šioje aibėje dvi racionaliųjų skaičių sekos (x_n) ir (y_n), vadinamos ekvivalenčiomis, jei joms galioja savybė: kiekvienam natūraliajam skaičiui K egzistuoja toks natūralusis skaičius N, kad atstumas $|x_n - y_n| < 1/K$ kai $n > N$. Tada parodoma, kad aibė R, kurios elementais yra sutapatintos ekvivalenčios racionaliųjų skaičių fundamentalios sekos, tenkina visas realiųjų skaičių aibės aritmetinių operacijų ir tvarkos savybes. Be to, aibėje R galioja savybė: kiekviena fundamentali realiųjų skaičių seka konverguoja į realųjį skaičių. Ji reiškia, kad realieji skaičiai užpildo „tarpus" tarp racionaliųjų skaičių, t. y. realiųjų skaičių aibė yra „tolydi". Ši savybė vadinama realiųjų skaičių aibės pilnumo savybe.

R. Dedekindo pasiūlyta realiųjų skaičių aibės konstrukcija naudoja iš pirmo žvilgsnio kitą pilnumo savybę: kiekviena netuščia ir aprėžta realiųjų skaičių aibė turi mažiausią viršutinį rėžį ir didžiausią apatinį rėžį. Universiteto pirmojo kurso matematikos studentas paprastai žino ir gali įrodyti, kad abi pilnumo formos yra ekvivalenčios, t. y. viena iš jų galioja tada ir tik tada, kai galioja kita. R. Dedekindo konstrukcija keičia realiųjų skaičių aibės pilnumo savybę tokia realiųjų skaičių „tolydumo“ savybės samprata: jei visi realiųjų skaičių aibės *R* elementai yra padalyti į dvi dalis taip, kad visi vienos dalies elementai yra kairėje pusėje nuo visų kitos dalies elementų, tai egzistuoja lygiai vienas aibės *R* elementas, kuris realizuoja tokį aibės *R* padalijimą į dvi dalis.

Siekdami atskirti šias dvi realiųjų skaičių aibės pilnumo (tolydumo) sampratas, vieną iš jų vadinsime Cantoro kontinuumu, o kitą vadinsime Dedekindo kontinuumu. Reikia pastebėti, kad konstruojant Cantoro kontinuumą (kaip ir Dedekindo kontinuumą) nebuvo naudojami jokie objektai, kurie nepriklauso racionaliųjų skaičių aibei; tarp jų nebuvo naudojami ir geometrijos objektai. Iš konstrukcijos neišplaukia, ar geometrinė tiesė turi Cantoro kontinuumo pilnumo savybę, ar ne. Tą patį galima būtų pasakyti apie sąryšį tarp geometrinės tiesės ir Dedekindo kontinuumo. Tą gerai suvokė ir G. Cantoras ir R. Dedekindas. Siekiant matematinio kontinuumo vienareikšmiškumo, paprastai naudojama Dedekindo–Cantoro aksioma arba tiesės tolydumo aksioma: tarp tiesės taškų aibės ir realiųjų skaičių aibės egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis. Griežtai kalbant, neaišku, ką reiškia geometrinės tiesės kontinuumas. Euklido *Pradmenyse* esančių aksiomų nepakanka suformuluoti tinkamą tiesės tolydumo sampratą. Tačiau ją galima gauti papildžius naujomis aksiomomis (žr. tolydumo aksiomas knygoje Greenberg [2007]). Kitą vertus, skirtinga geometrinio kontinuumo samprata išplaukia iš D. Hilberto (1862–1943) geometrijos aksiomų.

Paprastai kontinuumu vadinama realiųjų skaičių aibės galia *c*. Tokiu atveju, kiekviena aibė, kuri turi abipus vienareikšmę atitiktį su *R,* turės tą pačią galią ir vadinsis kontinuumu. Aibių teorijos „dėka“ matematinis kontinuumas yra sudarytas iš diskrečių elementų, ir šis požiūris į kontinuumą kol kas dominuoja tarp matematikų. Tačiau opozicija šiam požiūriui niekada nebuvo išblėsusi (H. Poincaré, H. Weylis ir daugelis kitų).

Fefermanas [2009] pasiūlė kontinuumą tapatinti ne su aibės galia, o su pačia aibe. Jis nagrinėja net devynis skirtingus matematinius kontinuumus. Lygindamas juos savo siūlytu konceptualaus struktūralizmo požiūriu, kvestionuoja matematinio kontinuumo sąvokos vienareikšmiškumą. Tuo tarpu rašydamas apie kontinuumą gamtos moksluose, Fefermanas [2009] teigia:

Kadangi matematikos turinys iš esmės skiriasi nuo gamtos mokslų turinio, o matematikos žinios yra tam tikra prasme a priori*, skirtingai nuo gamtos mokslo žinių* a posteriori *pobūdžio, sunkiausia – naudojant Wignerio* [1960] *žodžius – paaiškinti nepaaiškinamą matematikos efektyvumą gamtos moksluose. [...] Kadangi visa matematika remiasi realiųjų skaičių sistema, tai bet kuriuo sąryšio tarp matematikos ir gamtos požiūriu visame tame neegzistuoja savarankiška fizikinio kontinuumo samprata.*

Kitaip tariant, nėra fizikinio kontinuumo sampratos, kuri skirtųsi nuo matematinio kontinuumo.

Kontinuumo sąvoka, kaip ir skaičiaus sąvoka, apibrėžiama naudojant aibės ir jos elemento sąvokas. Pastarosios sąvokos, B. Riemanno ir R. Dedekindo dėka tapo svarbiausiomis matematikoje [Ferreirós; 1996].

Aibių teorija. Matematinė *aibės* sąvoka paprastai siejama su G. Cantoro vardu. Tačiau jo vardą teisingiau būtų sieti su begalinių aibių hierarchijos sukūrimu. 19 a. pabaigoje, susidūrus su paradoksais, aiškėjo būtinybė tiksliau apibrėžti aibės ir jos elemento sąvokas. Tarp keleto alternatyvų dominuojančią padėtį matematikoje užima Zermelo–Fraenkelio aksiomų sistema (sutrumpintai *ZF* aksiomų sistema). Šios sistemos rinkimo aksioma sukėlė didžiausią ir iki šiol besitęsiančią kontraversiją [Moore; 1982].

Rinkimo aksioma *Jei F yra netuščiųjų aibių rinkinys, tai egzistuoja tokia funkcija f, kad f(S)* $\in$ *S kiekvienai aibei S iš rinkinio F.*

Kitaip kalbant, turint bet kurį netuščiųjų aibių rinkinį *F*, egzistuoja tokia aibė, kurioje yra po vieną elementą iš kiekvienos rinkinio *F* aibės *S*. Šiuolaikinėje matematikoje rinkimo aksioma tapo įprastu faktu, naudojamu įrodyti daugeliui svarbių savybių.

Viena tokių savybių susijusi su Lebesgue matu realiųjų skaičių aibėje *R*. Matu vadinama neneigiamas reikšmes įgyjanti funkcija *m*, apibrėžta realiųjų skaičių aibėms taip, kad galioja skaičiojo adityvumo savybė, pastumtos aibės matas nesikeičia ir vienetinio intervalo [0,1] matas lygus 1. Pavyzdžiui, realiųjų skaičių intervalo [*a*, *b*] Lebesgue mato reikšmė yra to intervalo ilgis *b–a*. Pasirodo, kad tokia funkcija apibrėžta ne visoms realiųjų skaičių aibėms. Aibės, kurioms Lebesgue matas apibrėžtas, vadinamos *mačiosiomis* aibėmis. Naudojant rinkimo aksiomą, 1905 m. G. Vitali (1875–1932) sukonstravo aibę, kuri nėra mati (žr. Jech [2008, p. 2]).

Rinkimo aksioma yra esminė įrodant nemačios aibės egzistavimą. R. Solovay [1970] sukonstravo tokį matematinį objektą, vadinamą *ZF* aksiomų modeliu, kuriam galioja visos *ZF* aksiomos, išskyrus rinkimo aksiomą, bet visos realiųjų skaičių aibės yra mačios. Paprastumo požiūriu atrodytų, kad galbūt verta atsisakyti rinkimo aksiomos. Tačiau egzistuoja kitas *ZF* aksiomų modelis be rinkimo aksiomos, kuriame egzistuoja begalinė realiųjų skaičių aibė, neturinti skaitaus poaibio (žr. Jech [2008; p. 141]). Ši ir daug kitų matematikams neįprastų savybių, nesant rinkimo aksiomos, atsveria sunkumus, susijusius su nemačiųjų aibių egzistavimu. Toliau paminėsime svarbiausią su rinkimo aksioma susijusią kontraversiją.

Banacho–Tarskio paradoksas. Šiuo vardu vadinama grupė matematikos teiginių apie galimybę suskaidyti rutulį į baigtinį skaičių dalių, iš kurių, sukant ir stumdant, galima surinkti du naujus tokio pat dydžio rutulius. Pirmąjį tokį teiginį 1924 metais įrodė S. Banachas ir A. Tarskis (daugiau apie tai žr. Wagon [1985]). Kadangi toks teiginys prieštarauja gyvenimiškai intuicijai, šiems teiginiams pridedamas paradokso vardas.

Suformuluokime teiginį tiksliau. Pirmiausia primename, kad kalbama apie matematikos objektą – rutulį. Konkretumo dėlei tarkime, kad tai yra vienetinis uždaras rutulys trimatėje Euklido erdvėje, t. y. aibė

$S = \{(x,y,z) \in R^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Esminis skirtumas tarp rutulio *S* ir realaus fizinio rutulio yra tas, kad *S* yra sudarytas iš be galo daug elementų. Realus rutulys gali turėti tik baigtinį skaičių dalių – atomų. Galime ignoruoti tą aplinkybę, kad atomą sudaro dar mažesnės dalelės. Bet kuriuo atveju, remiantis atomo fizikos teorija, realų rutulį sudaro baigtinis skaičius elementų.

Teiginys *Egzistuoja toks baigtinis rinkinys aibių* $A_1,\ldots A_n$, *kurios poromis nesikerta ir jų sąjunga yra aibė S. Be to, egzistuoja tokio pat dydžio funkcijų rinkinys* $f_1,\ldots,f_n$, *kurios yra Euklido erdvės sukiniai ir postūmiai, o aibių rinkinio* $B_1=f_1(A_1)$, ..., $B_n=f_n(A_n)$ *pirmųjų m ir likusių n–m elementų sąjungos atitinkamai sudaro aibę S ir pastumtą aibę S'.*

Detalų teiginio įrodymą ir daugelį kitų su paradoksu susijusių faktų galima rasti Wagon [1985]. Svarbiausia tai, kad šiam teiginiui įrodyti naudojama rinkimo aksioma. Tai reiškia, kad rutulio *S* suskaidymas į dalis nėra konstruktyvus, t. y. nėra baigtinio algoritmo, kuris duotų norimą rutulio suskaidymą. Gal būt šis teiginys bus suprantamesnis, jei prisiminsime, kaip natūraliųjų skaičių aibę *N* galima padalyti į dvi nesikertančias dalis ir kiekviena iš jų yra tokio pat dydžio, kaip ir pradinė aibė *N*. Iš tikrųjų, tegul C_1 yra visų nelyginių skaičių aibė {1, 3, 5,...}, o C_2 yra visų lyginių skaičių aibė {2, 4, 6,...}. Aišku, kad aibės C_1 ir C_2 nesikerta, o jų sąjunga yra aibė *N*. Dabar pakanka įsitikinti, kad tarp aibių C_1 ir *N* bei tarp aibių C_2 ir *N* galima apibrėžti funkcijas, kurios nustato abipus vienareikšmes atitiktis tarp kiekvienos poros narių. Pirmoji funkcija kiekvienam $2n–1 \in C_1$ priskiria $n \in N$, o antroji funkcija kiekvienam $2n \in C_2$ priskiria $n \in N$. Abipus vienareikšmė atitiktis tarp dviejų aibių reiškia, kad jos turi tą patį dydį (galią). Šis faktas baigtinėms aibėms yra akivaizdus, o begalinėms aibėms, kaip rodo pastarasis pavyzdys, gali būti mažiau akivaizdus. Savo laiku Galilėjus (Galileo Galilei, 1564–1642), pastebėjęs tokias natūraliųjų skaičių aibės savybes, vertino jas kaip argumentą prieš begalybės naudojimą moksle.

Dar gilesnės matematinės intuicijos reikia bandant suprasti Banacho–Tarskio paradoksą. Matematikai žino, kad ne kiekviena trimatės Euklido erdvės aibė turi tūrį. Tūrio sąvokos rutuliui ir kitoms panašioms figūroms yra gerai žinomos. Šias sąvokas galima apibendrinti ir bet kokiems Euklido erdvės poaibiams. Nauja sąvoka vadinama aibės matu, o aibė, kuriai egzistuoja matas, vadinama mačiąja. Pasirodo, kad ne kiekvienas Euklido erdvės poaibis yra matus; tokios aibės turi labai sudėtingą geometrinę struktūrą. To struktūros sudėtingumo pasekme ir galima būtų aiškinti Banacho–Tarskio paradokso prasmę. Kitame skyrelyje matysime, kad šių dienų fizikai, net Banacho–Tarskio paradoksas neatrodo paradoksaliu.

Kaip jau minėta, nepaisant Banacho–Tarskio paradokso, aibių teorija, grindžiama *ZF* aksiomų sistema, dominuoja matematikoje. Kita iki šiol svarbi matematikos kryptis yra L. E. J. Brouwerio (1881–1966) intuicionizmas. Jo nuomone, svarbiausia yra protu arba mintyse atliekama matematinių objektų konstrukcija, o ne logikos dėsnių taikymas. Brouwerio požiūriu, ne laisvas aksiomų pasirinkimas sudaro matematikos esmę, bet laisvė atlikti konstrukciją mintimis. Viena iš šio požiūrio išvadų yra tai, kad negalimo trečiojo dėsnis logikoje (teiginys „A arba ne A“ teisingas visiems teiginiams A) nėra taikytinas matematikoje. Intuicionistinėje matematikoje matematinis įrodymas yra mintinė konstrukcija. Todėl teiginys „A arba ne A“ yra įrodomas, jei yra įmanoma teiginį

A atitinkanti konstrukcija arba teiginį „ne A“ atitinkanti konstrukcija.

Kaip alternatyvą Brouwerio intuicionizmui, D. Hilbertas (1862–1943) pasiūlė savąją matematikos formalizavimo programą, kuri turėjo suteikti pagrindą matematikos neprieštaringumui. Pagal šią programą reikėjo: (1) sukurti tokią formaliąją sistemą, kuri apimtų natūraliųjų skaičių aritmetiką; (2) įrodyti, kad tokioje sistemoje neįmanoma gauti dviejų vienas kitam prieštaraujančių teiginių ir (3) toks neprieštaringumo įrodymas turi remtis pačioje sistemoje konstruojamais „finitiniais“ metodais, analogiškais Brouwerio mintinėms konstrukcijoms. Tačiau K. Gödelis (1906–1978) įrodė, kad bet kurios pirmą sąlygą tenkinančios formalios sistemos neprieštaringumo įrodymas nėra įmanomas tokios sistemos vidinėmis priemonėmis, ir todėl neįmanoma realizuoti Hilberto programos jos pradine forma. Šis faktas iliustruoja matematikos vidinį poreikį plėstis – savybę, nesuderinamą su uždara formalia sistema.

Tarp kitų matematikos pagrindimo alternatyvų yra 1916 m. sukurta S. Leśniewskio (1886–1939) mereologija. Mereologija (iš graikų žodžic *μερος* – *dalis*) yra dedukcinė loginė sistema, kurios pirminės sąvokos yra dalis ir visuma. Skirtingai nuo aibių teorijos, rinkinio ir jo elemento mereologinis sąryšis yra tranzityvus. Tai, kad mereologija neturi tuščiosios aibės sąvokos, yra kitas jos ypatumas. Šios teorijos šaknys glūdi antikinės Graikijos filosofijoje. Mereologija taikoma įvairiuose moksluose. Ji naudojama ir kaip alternatyva Hilberto geometrijai, siekiant pakeisti tašką kaip pirminę sąvoką, todėl kartais siejama su alternatyva matematinei kontinuumo sampratai. Prie to dar grįšime kitame skyriuje.

Predikatyvizmo programa. Aibės naiviosios sąvokos paradoksų priežastimi B. Russellas laikė tai, kad, apibrėžiant naujas matematikos sąvokas, neišvengta *ydingojo rato* (angl. *vicious circularity*). Spręsdamas šią problemą B. Russellas sukūrė savąją tipų teoriją, kurią realizavo trijų tomų veikale *Principia Mathematica* kartu su A. N. Whiteheadu (1861–1947) 1910–1913 m. Tipų teorijoje objektai yra suskirstyti į tipus ir kiekvienas aukštesnės eilės tipas toliau padalytas į lygius. Toks suskirstymas į lygius kliudė matematikai remtis tipų teorija, todėl B. Russellui teko priimti specialią aksiomą, kuri iš esmės sužlugdė problemos sprendimą, kaip parodė F. P. Ramsey (1903–1930) savo knygoje *The Foundations of Mathematics* 1925 m.

Tuo tarpu H. Poincaré (1854–1912) teigė, kad paradoksų priežastis yra konkreti ydingojo rato forma, reiškianti, kad objektas c apibrėžiamas naudojant rinkinį C objektų, tarp kurių yra c. Ši ydingojo rato forma gali sukelti neigiamų pasekmių tada, kai objektas c yra „sukuriamas“ apibrėžtimi. Taip gali atsitikti tada, kai iš anksto nėra žinoma, kad visi klasės C elementai jau egzistuoja. Kiekviena apibrėžtis, neturinti šios ydingojo rato formos, vadinama *predikatyvia* (angl. *predicative*).

Pasirodo, kad daugumos matematikos objektų apibrėžčių nėra predikatyvios. Pavyzdžiui, pagal R. Dedekindą, natūraliųjų skaičių aibė N yra sankirta tokių aibių X, kurioms priklauso nulis, yra uždaros prieaugio operacijos S atžvilgiu (čia $S(n):=n+1$) ir nulis nepriklauso reikšmių aibei $\{S(x)\colon x \in X\}$. Šioje apibrėžtyje dalyvauja aibių X rinkinys, tarp kurių yra ir apibrėžiamoji aibė N. Todėl ši natūraliųjų skaičių aibės apibrėžtis nėra predikatyvi. G. Frege ir kitos natūraliųjų skaičių konstrukcijos turi panašias problemas.

Predikatyviosios apibrėžties problema taip pat atsiranda įrodant realiųjų skaičių pilnumo savybę (kontinuumo klausimas). Tarkime, kad realieji skaičiai apibrėžti R. Dedekindo konstrukcija: realusis skaičius yra *pjūvis*, kurį sudaro nesikertanti racionaliųjų skaičių aibių pora. Šiame kontekste pilnumo klausimas yra sprendžiamas įrodant, kad kiekviena netuščia ir aprėžta pjūvių aibė turi mažiausią viršutinį rėžį. Tegul X yra netuščia ir aprėžta pjūvių aibė. Šią aibę atitinkantis mažiausias viršutinis rėžis yra toks pjūvis y, kuriam priklauso visi tie racionalieji skaičiai q, kurie priklauso kuriam nors pjūviui x iš X. Pastaroji pjūvio y apibrėžtis naudoja visų pjūvių rinkinį, tarp kurių yra y. Taigi ši apibrėžtis nėra predikatyvi.

H. Weylis (1885–1955) savo 1918 m. knygoje *Das Kontinuum* ėmėsi darbo, kuriuo bandė nustatyti, kiek galima išsaugoti matematikos tarus, kad natūraliųjų skaičių aibė egzistuoja, o visi kiti objektai konstruojami naudojant tik predikatyvias apibrėžtis. Jis parodė, kad sekant R. Dedekindu galima sukonstruoti realiuosius skaičius, kuriems galioja silpnesnė pilnumo savybė: kiekviena aprėžta realiųjų skaičių (pjūvių) seka turi mažiausią viršutinį rėžį. Šiuo atveju rinkimo aksiomos tarp prielaidų nėra ir todėl neįmanoma įrodyti įprastinės realiųjų skaičių pilnumo savybės. Tačiau H. Weylis parodė, kad silpnesnė pilnumo savybė vis dar pakankama įrodyti visas 19 a. žinomas teoremas tolydžiosioms funkcijoms.

Šis H. Weylio darbas iki galo neišsprendė suformuluotos užduoties. 20 amžiaus pabaigoje šią užduotį toliau sprendė S. Fefermanas [1998]. Be kita ko, jis suformulavo tokią predikatyvumo programą:

- Matematinės sąvokos, tokios kaip aibė ar funkcija, yra priimtinos tik tuo atveju, jei formuluojamos naudojant apibrėžtis be ydingojo rato. Todėl apibrėžiant naujus objektus galima remtis tik tokiomis konstrukcijomis, kurios grindžiamos ankstesnėmis apibrėžtimis.
- Tariama, kad natūraliųjų skaičių seka yra duota, o visų natūraliųjų skaičių rinkinys sudaro aibę.

Šios programos tikslas – sustiprinti griežtumo standartus matematikoje nedarant tokių revoliucinių pokyčių, kokių reikalauja L. E. J. Brouwerio intuicionizmo programa. S. Fefermanas spėja, kad „predikatyvioji matematika“ yra pakankama gauti visą tą matematiką, kuri yra būtina šių laikų gamtos mokslams.

Kas pateisina nepredikatyviųjų apibrėžčių naudojimą šiuolaikinėje matematikoje? K. Gödelis [1944; p. 456] pasiūlė filosofinį nepredikatyviųjų apibrėžčių naudojimo matematikoje pateisinimą. Pasak jo, predikatyvumo reikalavimas yra tada problema, kai objektas yra konstruojamas apibrėžtimi, ir taip atsitinka laikantis konstruktyvizmo (matematinio nominalizmo) požiūrio į matematiką. Tačiau laikantis realistinio požiūrio į matematikos objektus, kaip egzistuojančius nepriklausomai nuo mūsų (matematinis platonizmas), nieko absurdiško nėra tame, kai apibrėžiamas objektas priklauso apibrėžtyje nagrinėjamai objektų klasei. Tokiu atveju apibrėžtis nesukuria objekto, o tik nurodo į jau egzistuojantį. Taigi matematinis platonizmas užtikrina, kad visa šiuolaikinė matematika tenkina predikatyvumo reikalavimą. Šis argumentas racionaliai paaiškina, kodėl dauguma matematikų intuityviai laikosi matematinio platonizmo pažiūrų. Be to, tai puikus pavyzdys, kokią didelę reikšmę matematikai gali turėti jos filosofija.

Kita vertus, galima apversti K. Gödelio argumentą aukštyn kojom. Pripažindami šiuolaikinės matematikos objektų teisėtumą, nepaisydami nepredikatyvaus jų apibrėžimo būdo, sukuriame tam tikrą tų objektų egzistavimo statusą. Tai būtų dar viena matematinio realizmo forma.

Tai kas gi yra matematika?

- Matematika yra mokslas apie reikšmingas tvarkos ir sąryšių formas.
- Matematika yra mokslas apie galimų pasaulių struktūras.
- Matematika yra mokslas apie begalybę.
- Matematika yra mokslas apie sudėtingų sistemų struktūras.
- Matematika yra tikrovės modeliavimo simboline forma tyrimas.

Kiekvienas iš šių teiginių yra gili tiesa, remiantis Nielso Bohro tokios tiesos požymiu: jos neiginys taip pat yra gili tiesa. Kartu paėmus, šie teiginiai sudaro apytikrį matematikos vaizdą visumos perspektyvoje. 4-as ir 5-as apibūdinimai paimti iš Browder [1988; p. 286]. Ten taip pat teigiama, kad 1-as ir 2-as apibūdinimai sudaro tai, ką Descartesas ir Leibnizas vadino *mathesis*. Tuo tarpu 3-as apibūdinimas yra kildinamas iš Leibnizo; vėliau jį atgaivino Poincaré ir Weylis.

Pabandysime apibūdinti matematiką dar kitaip. Sakysime, kad sąvoka yra matematinė, jei ji apibrėžiama aksiomomis ir/arba kitomis sąvokomis, kurios savo ruožtu taip pat apibrėžiamos aksiomomis. Taip pat sakysime, kad argumentas yra patikimas, jei, esant klaidingai išvadai, visada galima rasti klaidą. Taigi **matematika yra matematinių sąvokų tyrimas naudojant tik patikimus argumentus.**

Su realia tikrove nesaistoma matematikos objektų pasirinkimo laisvė paaiškina, kodėl matematikui būdinga siekti loginio griežtumo. Tai garantija, suteikianti objektui ar jo savybei matematinę egzistenciją, skirtingai nuo gamtos mokslų, kuriuose tyrimo objektų egzistenciją patvirtina realybė ir eksperimentas. Matematika yra autonomiška ir ta prasme, kad naujoms idėjoms būti pripažintoms pakanka parodyti jų naudą sprendžiant pačios matematikos problemas; nuoroda į praktinę naudą ar motyvacija iš išorės nėra reikalinga tam, kad darbas būtų visiškai pripažintas matematikų bendruomenėje.

Toks matematikos apibūdinimas leidžia įžvelgti skirtumų ir panašumų tarp jos ir viso likusio mokslo. Paprastai gamtos ir visuomenės mokslai tiria sąvokas, susijusias su realia tikrove, o mokslo tyrimo metodai nesiriboja samprotavimų logika. Šie matematikos ir likusio mokslo apibūdinimai nėra formalūs ir reikalauja tolesnio nagrinėjimo. Nors čia visur matematika buvo vadinama mokslu, toliau apie ją kalbėsime taip, lyg ji būtų kažkas greta mokslo.

Matematika ir mokslas[2]

Praeitame skyrelyje matematikos autonomiškumas mokslo atžvilgiu buvo grindžiamas pačios matematikos raida. Šiame

[2] Vakarų kultūros tradicijoje anglų kalbos žodis *science* paprastai siejamas su gamtos mokslu. Rusų kalba žodis *nauka* siejamas ir su literatūra, ir su suvirinimu, ir su mezgimu, ir pan. Tuo tarpu mūsų kalba, kartu su įprastinėmis *mokslas* reikšmėmis, Lietuvių kalbos žodynas nurodo taip pat reikšmes: svarbieji religijos teiginiai, pamokslas ir pan.

skyrelyje tas pats autonomiškumas grindžiamas matematikos ir gamtos mokslų (fizikos) santykių istorine apžvalga. Būtent istorinis požiūris leidžia pastebėti, kad matematika tolsta nuo gamtos mokslų.

Prieš pradedant nagrinėti matematikos ir mokslo santykius verta pagalvoti, ką reiškia matematikos taikymas, pavyzdžiui, fizikoje, kai kalbama apie judančio kūno greitį. Matematikos taikymas prasideda tada, kai realioji erdvė tapatinama su trimate Euklido erdve R^3, o laikas tapatinamas su realiųjų skaičių aibe R. Čia verta prisiminti, kad realiųjų skaičių aibė R yra 19 a. žmogaus proto kūrinys, sukurtas visiškai neatsižvelgiant į tai, kas yra realusis laikas ir kokios jo savybės. Tapatinant laiką su realiųjų skaičių aibe R, o realiąją erdvę su R^3, pasaulis suvokiamas per matematikos akinius. Tai reiškia, kad I. Niutono laikas, kai realioji erdvė ir laikas buvo suvokiami kitaip, naudojant Euklido aksiomomis apibūdinamas erdvę ir tiesę, pasaulis atrodė kitaip. Tai taip pat reiškia, kad, sakysime, po šimto metų, kai matematikai pakeis savo realiųjų skaičių aibės sampratą, pasaulis vėl atrodys kitaip.

Paprastumo dėlei tarkime, kad nagrinėjamas kūnas yra taškas, judantis tiese. Tada jo padėtis erdvėje nusakoma taip pat realiųjų skaičių aibe. Tapatinant laiką su neneigiamų realiųjų skaičių aibe R^+, tiesia linija judančio kūno vieta laiko momentu t išreiškiama skaičiumi, kurį pažymėjus $f(t)$, gauname funkciją f iš aibės R^+ į aibę R. Taigi judėjimas išreiškiamas realiojo kintamojo funkcija f su realiosiomis reikšmėmis. Kitaip matematika taikoma, kai bandome nustatyti, kas yra greitis. Vidutinis greitis yra funkcijos f reikšmių pokyčio $f(t) - f(s)$ ir atitinkamų laiko momentų pokyčio $t–s$ santykis. Kita judėjimą apibūdinanti sąvoka yra momentinis greitis, apskaičiuojamas bet kuriuo fiksuotu laiko momentu. Pavyzdžiui, momentu s momentinis greitis yra santykio $f(t) - f(s)$ su $t–s$ riba, kai t artėja prie s. Tiksli pastarosios frazės prasmė suteikiama analizėje naudojama ribos sąvoka. Jei tokia riba egzistuoja, ji vadinama funkcijos f išvestine taške s. Matome, kad greitis yra ne gamtoje stebimas reiškinys, bet matematikos sąvoka, apibrėžianti fizikoje naudojamą dydį. Kartu su matematikos sąvokų kaita kinta ir fizikoje naudojamos atitinkamos sąvokos. Savo ruožtu, matematikos sąvokų formavimasis nėra vienareikšmis procesas, ypač pastaruosius kelis šimtmečius. Pavyzdžiui, I. Niutono fliuksijos ir Cauchy išvestinės (taigi ir momentinio greičio) sampratos radikaliai skiriasi. Dar kitokią ribos sampratą naudoja fizikai, kaip vaizdžiai paaiškina Arnoldas [2005]. Šis matematikos taikymų pavyzdys ir praeito skyrelio matematikos apibūdinimas rodo, kad matematikos ir mokslo santykiai nėra akivaizdūs.

Įdomus jau cituoto amerikiečių matematiko F. E. Browderio argumentas dėl matematikos autonomiškumo mokslo atžvilgiu. Pagrindinė mintis yra ta, kad mokslui būtinos originalios matematinės idėjos atsiranda tada, kai matematika vystosi nepriklausomai nuo mokslo. Konkrečiai Browderis [1988; p. 285] rašo:

> *Visoje nuo Graikų besitęsiančioje istorijos eigoje, matematinių tyrimų* ***autonomija*** *suprantama kaip laisvė nuo bet kokio stipraus, kitose [mokslo] disciplinose vykdomų tyrimų priklausomumo ir nuo jų aktyvaus pasikartojimo, buvo viena principinių kūrybiškumo komponenčių. Natūralios priežastys, dėl kurių šis kūrybiškumas svarbus mokslui,*

pavyzdžiui, yra tai, kad pakankamai gerai išvystytų matematikos sąvokų, teorijų ar skaičiavimo metodų išankstinis turėjimas yra būtinas mokslinio supratimo pažangai (pajuodinta Browderio).

Tie, kurių mokslo veikla yra neatskiriama nuo matematikos taikymų, gali prieštarauti matematikos autonomiškumui. Teigdamas, kad tokia nuostata yra paviršutiniškas požiūris, Browderis [1988; p. 286] rašo:

Bet kokia sąveika yra reikšminga, jei abi sąveikaujančios pusės pasižymi abipusiu visaverčiu egzistavimu ir prasmingumu. Atskiru atveju, matematinėje veikloje turime užtikrinti jos esminės dalies autonomiškumą, jei mūsų tezė apie stiprią sąveiką yra nuoširdi.

Tai yra racionalus pagrindimas to, kad matematika turėtų būti autonomiška.

Istoriniam argumentui išdėstyti trumpai apžvelgsime tik svarbiausius matematikos ir mokslo santykių raidos etapus.

Antikos laikais matematikos žinių pobūdis labai skyrėsi nuo jutiminio pasaulio pažinimo. Pagal Platoną (424/423–348/347 m. pr. Kr.), matematika tiria amžinas nekintančias abstrakčias Formas, darydama prielaidas, išreikštas protui akivaizdžiais teiginiais. Tuo tarpu gamtos tyrimas (tai, kas dabar vadinama mokslu) pasižymėjo neapibrėžtumu ir subjektyvumu. Tokiu atveju tik matematika galėjo pretenduoti į tikro žinojimo statusą. Šis žinojimas, pagal Platoną, žmogui buvo įgimtas ir įgyjamas jo sielai dar neturint kūno. Kitaip sakant, žmogaus matematinės žinios įgyjamos prisiminimo būdu. Tiek, kiek Platono požiūris atstovauja Antikai, to meto matematika buvo artima tikrajam pažinimui – mąstymui, o mokslas – tik nuomonė. Šio požiūrio įtaką iliustruoja Ptolemėjaus (90–168) žodžiai:

tik matematika, jei jos imtis kritiškai, ją praktikuojantiems suteikia tikras ir kryptingas žinias, kadangi jos pagrindžiamos nenuginčijamomis aritmetikos ir geometrijos priemonėmis. (cit. pagal [Harris; 2008])

Kitą matematikos ir mokslo santykių etapą žymi Galilėjus, kuris 1623 metais savo knygoje *Il Saggiatore* (angl. *The Assayer*) rašė:

[Gamta] yra prieš mūsų akis nusidriekusi didžioji knyga – aš turiu galvoje visatą – bet mes jos negalime suprasti, jei, pirmiausia, neišmoksime kalbos ir nesuprasime simbolių, kuriais ji parašyta. Knyga parašyta matematikos kalba, o simboliai yra trikampiai, apskritimai ir kitos geometrinės figūros, be kurių neįmanoma suvokti nei vieno žodžio; be kurių tuščiai klaidžiojama tamsiame labirinte (cit. pagal [Kline; 1972, p. 328–329]).

Kadangi mokslas tiria gamtą, o gamta veikia pagal matematikos dėsnius, tai gamtai paaiškinti pakanka suprasti matematiką. Be to, matematikos dėsniai yra galutinės gamtos reiškinių priežastys, kurių nebereikia toliau aiškinti. Šia prasme mokslas ir matematika tampa to paties lygio žinojimu – labai ženklus santykių pokytis lyginant su Antikos laikais. Galilėjaus požiūris dėl gamtos reiškinių matematinių priežasčių skyrėsi nuo jo amžininko R. Descarteso (1596–1650), kuris rašė, jog mokslo tikslas – pirminės reiškinių priežastys.

Galilėjaus požiūrį į matematiką ir mokslą perėmė ne tik I. Niutonas, jis tapo 18 a. gamtos filosofijos tyrimų dominuojančia paradigma. Tiriant gravitacijos jėgas Niutonui svarbiausia nustatyti jų matematinį apibūdinimą, o ne tokių jėgų atsiradimo priežastinį mechanizmą. Šis požiūris prieštaravo tuo metu egzistavusiam Descarteso požiūriui, jog veiksmas yra galimas tik kaip kontakto pasekmė; nėra poveikio per atstumą. Kūnų judėjimo dėsnius ir gravitacijos jėgas, iki tol naudotus tik Žemės reiškiniams aiškinti, Niutonas pirmą kartą pritaikė dangaus kūnų judėjimo aiškinimui. Vienintelis jam vėlesnių pasekėjų keliamas priekaištas yra tas, kad Niutonas naudojo tik geometrijos metodus, kiekvienai problemai spręsti sugalvodamas naują metodą. Taigi pasaulio tvarka pagal Niutoną ir Galilėjų yra surašyta geometrijos kalba. Tuo tarpu G. Leibnizas kūrė naują diferencialinį skaičiavimą, skirtą judėjimui apibūdinti. Niutono genijus ilgam sutrukdė matematinės analizės idėjų plėtrai Anglijoje, skirtingai nuo Europos. Šis idėjų plėtros skirtumas atsirado ir tęsėsi šimtmetį dėl Niutono ir Leibnizo prioriteto problemų.

Leibnizo simbolinis-algebrinis skaičiavimas pasirodė geriau pritaikytas judėjimui apibūdinti nei Niutono sintetinis-geometrinis. 18 a. matematikos svarbiausias pasiekimas – Niutono dėsnių, tarp jų ir garsiosios formulės $F=ma$, performulavimas, kurį iš esmės atliko Euleris. Šis matematikas iš esmės pats vienas sukūrė visą analizinę mechaniką, pakeitusią iki tol egzistavusią geometrinę mechaniką. Jo kūrybinis palikimas iki šiol nebaigtas leisti (Šveicarijos mokslų akademija jau išleido per 90 tomų Leonhard Euler, *Opera Omnia*).

Kita vertus, geometrinio metodo atsisakymas ir matematizuotas pasaulėvaizdis turėjo neigiamos įtakos matematinių samprotavimų griežtumui. Buvo teigiama, kad graikų matematikų standartai daugiau nebereikalingi. Naudojamų taisyklių paprastumas ir matematikos rezultatų (tariamas) atitikimas fizinę realybę savaime garantuoja pagrįstumą. Toks požiūris dominuoja 18 a. Europos matematikoje ir toliau tinka 19 a.

Tačiau 19 a. matematika tampa didelių permainų etapu, kurį aprašėme ankstesniame skyrelyje. Matematikos ir mokslo santykiuose taip pat atsiranda analogiškų pokyčių. Jų esmė matyti iš matematinių sąryšių-lygčių išvedimo pagrindimo. J. Fourier (1768–1830) vis dar seka Galilėjaus ir Niutono pėdomis, galutinėmis šilumos laidumo priežastimis laikydamas matematika išreiškiamus sąryšius [Maddy; 2008, p. 25]. Tačiau S. D. Poissonas (1781–1840) ir P. S. Laplace'as (1749–1827) kritikuoja Fourier šilumos laidumo lygties išvedimą, atkreipdami dėmesį į tai, kad neatsižvelgiama į sudėtingą medžiagos mikrostruktūrą. Būtent šios mikrostruktūros supratimas turi lemti matematinį reiškinio apibūdinimą. Priešingu atveju, neatsižvelgiant į galimas molekulių sąveikos jėgas, yra daroma nepateisinama aproksimacijos klaida. Taigi priežastinis-fizinis aiškinimas atskiriamas nuo matematinio aiškinimo, t. y. atmetama gamtos matematinės prigimties prielaida [Maddy; 2008, p. 26].

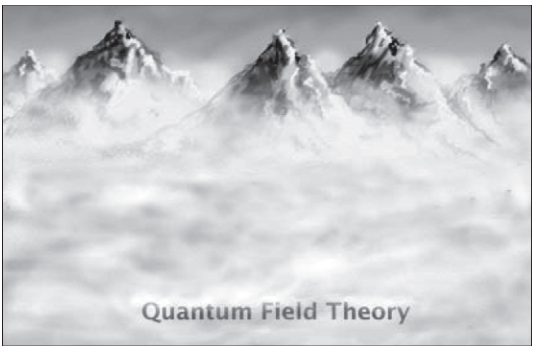
P. Maddy [2008, p. 33], toliau apžvelgdama matematinės fizikos raidą, daro išvadą, kad geriausi gamtos reiškinių matematiniai apibūdinimai nėra gamtos dėsnių kopijos, kaip buvo Niutono laikais. Abstraktūs matematiniai modeliai yra tik aproksimacijos, kurių atitikimo realiai tikrovei tikslumas nėra visiškai aiškus. Nors ir paradoksaliai skamba, taikomoji matematika tampa grynąja matematika ta prasme, kad modelio matematinį pagrįstumą lemia ne jo atitikimas realius gamtos reiškinius, o jo atitikimas matematinio griežtumo standartus.

Matematikos atsiskyrimą nuo gamtos mokslų liudija ir tai, kad daugelis naujų fizikos sąvokų gimė matematikų galvose gerokai anksčiau, nei tapo aiški jų svarba fizikai. Dažniausiai *grupės* sąvoka nurodoma kaip toks pavyzdys. Ši sąvoka atsirado 19 a. pradžioje apibendrinant intuityvią simetriškumo savybę, nustatytą tiriant algebrinių lygčių sprendinius. Paaiškėjo, kad grupės sąvoka taip pat natūraliai atsiranda geometrijoje ir diferencialinių lygčių teorijoje. Na, o 20 a. grupė tapo vienu esminiu įrankiu fizikoje apibūdinant fizikinę erdvę. Kitas klasikinis pavyzdys yra B. Riemanno pasiūlyta *neeuklidinės geometrijos* samprata (Riemanno geometrija) ir erdvės *kreivumo* sąvoka, kurie tapo Einšteino bendrosios reliatyvumo teorijos būtina grandimi, praėjus pusei šimtmečio. Ankstesnė fiksuota erdvėlaikio struktūra buvo pakeista dinamine, priklausančia nuo erdvės kreivumo pagal Einšteino lygtį. Kitas pavyzdys yra begalinės dimensijos erdvės struktūra, matematikų pradėta naudoti dėl variacinio skaičiavimo. Vėliau begalinės dimensijos Hilberto erdvės Hermite operatoriai tapo kvantinės mechanikos formalios struktūros pagrindu. Tai tik ledkalnio viršūnėlė.

20 a. matematikos ir fizikos atitolimas tampa dar ryškesniu žvelgiant į naujausias teorinės fizikos teorijas, kurios plėtojosi vystant jau minėtą bendrąją reliatyvumo teoriją ir kvantinę mechaniką. Riemanno geometrijos svarba bendrojoje reliatyvumo teorijoje, savo ruožtu, paskatino šios geometrijos matematinius tyrimus 20 a. Bet kitos fizikos teorijos nesukėlė panašaus atgarsio šiuolaikinėje matematikoje, sprendžiant iš E. Witteno straipsnio, skirto jo paties pasiūlytai M teorijai aiškinti (Witten [1998]). Jo teigimu, šiomis teorijomis iki šiol iš esmės užsiima tik fizikai, nors jų pagrindas yra matematinis. Tai reiškia, kad fizikinės teorijos neatitinka matematinio griežtumo standartų. Kita problema – Witteno M teorija iki šiol nepagrįsta eksperimentiškai.

Priešingai nei bendroji reliatyvumo teorija, kuri skirta astronominių kūnų judėjimui apibūdinti, kvantinė mechanika susijusi su labai mažų dalelių elgsenos aiškinimu. Kvantinės mechanikos sukūrimo priežastis yra ta, kad gravitacinės ir elektrinės jėgų sąveikos atvirkščiai proporcingos atstumo r tarp sąveikaujančių kūnų kvadratui: $-GM_1M_2/r^2$ ir kq_1q_2/r^2, atitinkamai. Kai atstumas r artėja prie nulio, sąveikos jėgos artėja prie begalybės. Siekdama išvengti šios problemos, kvantinė mechanika teigia, kad dalelės padėtis ir impulsas nėra vienodai tiksliai apibrėžiami tuo pačiu metu ir nusakomi Heisenbergo neapibrėžtumo sąryšiu. Tačiau dar gilesnė yra kvantinė lauko teorija, kuri siekia suderinti kvantinę mechaniką ir specialiąją reliatyvumo teoriją. Svarbiausia šios teorijos plėtros pasekmė yra apie 1970-uosius metus sukurtas elementariųjų dalelių *standartinis modelis*, nusakantis stiprias, silpnas ir elektromagnetines dalelių sąveikas. Standartinis modelis paaiškino daugumą fizikinių reiškinių, išskyrus gravitaciją, šioje teorijoje vadinamą kvantine gravitacija. Šiai problemai spręsti buvo pasiūlytas naujos rūšies neapibrėžtumas: nulinės dimensijos taškinė dalelė pakeista vienetinę dimensiją turinčia *styga* (angl. *string*). Apie 1985 m. jau buvo pasiūlytos net penkios stygų teorijos, kurias galiausiai 1995 m. sujungė E. Wittenas, sukūręs minėtąją M teoriją. Viena šios teorijos naujų konstrukcijų yra 11 dimensijų turintis erdvėlaikis.

Sunkumai, susiję su M teorija, jos eksperimentinis ir matematinis nepagrįstumas sukėlė nemažą kontraversiją. Apie tai rašo ekspertai P. Woitas [2006] ir L. Smolinas [2007]. Eksperimento atžvilgiu, stygų teorijų likimas vis dar sprendžiamas Šveicarijoje esančiame Didžiajame hadronų priešpriešinių srautų greitintuve (angl. *Large Hadron Collider*) (naujienos http://www.math.columbia.edu/~woit/wordpress). Matematinio griežtumo požiūriu, kvantinė lauko teorija nėra matematinė teorija, išskyrus keletą tarpusavyje nesusijusių sričių. Tai iliustruoja toks piešinys iš Witteno [1998] straipsnio:



Reaguodami į naują situaciją, Jaffe ir Quinnas [1993] rašo:

Nauji [matematikos] santykiai su fizika suteikė nemažą postūmį spekuliacijoms matematikoje. Pastaruoju metu matematinio tipo veikla fizikoje, vadinama „stygų teorija“, „konforminė lauko teorija“, „topologinė kvantinio lauko teorija“ ir „kvantinė gravitacija“ sukėlė bruzdesį matematikoje. Didžiausią iniciatyvą rodė asmenys, kurie turi aukštų energijų teorinės fizikos išsilavinimą. Žymiausias ir įtakingiausias tarp jų (bet neproblemiškiausias) yra Edwardas Wittenas. [...] Bet šie fizikai faktiškai nėra izoliuoti. Jie surado naują „eksperimentatorių bendruomenę“: matematikus. Patikimą ir naują informaciją apie jų studijuojamas struktūras dabar jiems teikia matematikai. [...] Tačiau taip atsitiko nepaisant skirtumų tarp bendruomenių normų ir standartų, kurių evoliucija yra būtina norint išsaugoti naujų struktūrų stabilumą. Nauji santykiai tarp matematikų ir fizikų gali sugriūti, jei nevyks greita plėtra ir „šeimos vertybių“ įsisavinimas. Fizikai grįš prie savo tradicinių partnerių, o matematikams teks iškuopti bendrą stalą ir bus ignoruojami tie matematikai, kurie dėl šio susidūrimo pasistūmės į dar aukštesnį teorinį lygmenį.

Straipsnio autoriai Jaffe ir Quinnas siūlo būdus, skatinančius nežalingą matematikos standartams spekuliavimą. Sprendžiant iš matematikų reakcijos į šį straipsnį, kol kas esame ilgo tolesnio bendravimo naujomis sąlygomis pradžioje (Atiyah et al [1994] ir Thurston [1994]).

Apie matematikos ir fizikos santykius matematikas Yu. I. Maninas [2007] rašo:

[...] po kelių šimtmečių artimo bendradarbiavimo, pagrindiniu įvykiu santykiuose tarp matematikos ir fizikos buvo jų atšalimas 20 a. pirmoje pusėje. Išsiskyrimas prasidėjo 19 a. paskutiniaisiais dviem dešimtmečiais ir buvo susijęs su dviejų mikropasaulių supratimo gilėjimu: matematinio, įkūnyto realiųjų skaičių kontinuumo idėjos sampratoje, ir fizikinio, atviro eksperimentui. [...] Svarbiausias skirtumas, išryškėjęs 20 a. antroje pusėje, atsispindi ne tiek mūsų požiūryje į įrodymo griežtumą, kiek į apibrėžimo tikslumą. Matematikai labai ištobulino savo kalbą, įgalinančią tiksliai

išreikšti tai, kas norima. Tikslumas yra įkūnytas visų pirma apibrėžtyse objektų, su kuriais dirbama, paprastai formuluojamas daugiau ar mažiau aksiomomis (arba kategorijomis) grįstų teorijų kontekste, ir formuluojant teiginius sumaniai naudojant metakalbą (bendrinės kalbos dėka). Visos kitos matematinio griežtumo priemonės yra antrinės, netgi įrodymo griežtumas. [...] Priešingai, nepatyręs, kad ir labai įdomaus fizikinio straipsnio skaitytojas dažnai pasijunta besąs naudojamų terminų reikšmių vakuume. Fizikai, be abejonės, yra ribojami savo pačių taisyklių, bet jos nėra mūsų [matematikų].

Faddeevo [2006] požiūriu, 21 a. parodys, ar matematika sugebės pakeisti eksperimentą fizikoje.

Atsižvelgiant į tai, kad matematika tolsta nuo gamtos mokslų, ankstesnioji taikomosios matematikos samprata kinta. Deja, ši problema beveik netiriama. Išimtis yra M. Steineris [1998], kuris matematikos taikomumo gamtos mokslams problemą aiškina jau pripažindamas ir atsižvelgdamas į tai, kad šiandienos matematikai naudoja grožio ir patogumo (angl. *beauty and convenience*) kriterijus. Šią aplinkybę jis vadina antropocentrizmu ir teigia, kad ji yra šiuolaikinės fundamentaliosios fizikos atradimų būtina sąlyga. Tokiu būdu, matematikos dėka mokslinės teorijos apie gamtą tampa *patogios vartoti* (angl. *user friendly*). Tačiau toks matematikos vaidmuo empiriniuose moksluose pakerta tikėjimą tų mokslų objektyvumu. Galbūt todėl, filosofams nerandant ar nenorint rasti kito žinojimo pagrindo, „šiuolaikinėje filosofijoje gamtos mokslai suteikia geriausią turimą žinojimo standartą, o matematikos statusas yra problemiškas" [Maddy; 2008, p. 18].

Tačiau tuštumos šiuolaikiniame mokslo pasaulyje ilgai nebūna. Jei profesionalūs filosofai vis dar nagrinėja pozityvizmą ir postmodernizmą, tai konkrečių mokslo sričių atstovai patys sprendžia naujausias savo srities filosofines problemas. Matematikos filosofijos šiame rašinyje neaptariame, bet vis dėlto negalima nepaminėti fizikos ir matematikos santykius nagrinėjančių darbų.

Fizikos dėsniai ir matematika. Toliau fizikos ir matematikos santykių klausimą aptarsime nagrinėdami R. Omnèso [2005, p. 27] siūlomą nepaaiškinamo matematikos efektyvumo problemos sprendimą. Pagal R. Omnèsą, matematikos neprieštaringumas išplaukia iš jos adekvatumo su teorine fizika. Tiksliau, tas adekvatumas reiškia:

Logika ir matematika grindžiamos fundamentaliomis aksiomomis. Šios aksiomos yra fizikos dėsniai. Jos yra pagrindžiamos dviem neatskiriamais kriterijais: savo produktyvumu konstruojant matematiką ir savo būtinumu išreiškiant fizikos dėsnius. Šis produktyvumas paaiškinamas dėsnių universalumu, subtilumu ir turtingumu: fundamentaliosios aksiomos privalo būti pakankamai produktyvios tam, kad dėsniai būti išreiškiami matematikos kalba. Atvirkščiai, jos generuoja visas galimas matematikos sritis. Galimi nauji dėsniai, naujos aksiomos, naujos sritys, ir jie atrandami tolesniais tyrimais. Neprieštaringumas yra vienodai būtini ir matematikoje, ir fizikos dėsniuose, kurie yra neatskiriami. Neprieštaringumas negali būti paaiškinamas, bet jis yra vienas iš dviejų tiesos kriterijų. Kitas kriterijus – tai matematikos teiginio, pretenduojančio išreikšti gamtos dėsnį, eksperimentinis falsifikuojamumas.

Tai yra Omnèso [2005, p. 215] fizicizmo (angl. *physism*) tezė. Tezės pavadinimas matyt yra aliuzija į G. Frege ir B. Russello logicizmą.

Jei R. Omnèsas teisus, tai matematikos autonomiškumas būtų panašus į tą, kurį Lietuva turėjo būdama Sovietų Sąjungos sudėtyje. Todėl įdomu, kokiais argumentais grindžiama ši tezė. Iš esmės ji grindžiama teiginiu, kad teorinė fizika ir matematika beveik sutampa, kiek aptariamos knygos autorius gali spręsti apie tai. Savo knygos 88–89 p. R. Omnèsas rašo:

> *jei redukuosime matematiką į vienintelį ir kuklų fizikos dėsnių kalbos vaidmenį, šiuolaikinės teorinės fizikos būsena ir paprasti neprieštaringumo reikalavimai nepakeistų šiuolaikinės matematikos visumos.*

Toliau, tikslindamas šį teiginį, Omnèsas [2005, p. 89] rašo:

> *Kai fizikinė teorija* (*arba jos dalis*) *naudoja matematiką iš jos formalizuotos visumos* (*t. y. priklausančios tai matematikos daliai, kuri remiasi fundamentaliomis aksiomomis*)*, galima aiškiai nurodyti teorijai reikalingas, bent jau iš principo, aksiomas ir nustatyti iš šių aksiomų išsirutuliuojančias idėjas matematikos visumoje. Fizikos dėsniai, kokie yra mums dabar žinomi, kaip tokio proceso pasekmė apims nepaprastai didelę matematikos visumos dalį, ir, galbūt, ją visą.*

Ko gero, R. Omnèsas įtarė, kad skaitytojui pastarasis teiginys gali neatrodyti pakankamai įtikinamas. Todėl kitame knygos puslapyje jis klausia:

> *...kokia tiksliai yra šiuolaikinės matematikos visumos dalis, kuri siejasi su ta matematika, kuri naudojama fizikoje? Negaliu pasakyti, kad aš [R. Omnès] rūpestingai analizavau šį klausimą, bet aš galvojau apie jį retkarčiais, kai skaičiau teorinės fizikos ar matematikos straipsnius. Aš esu tikras, kad nei vienas teoretikas, nei vienas matematinės fizikos ekspertas ar gerai fiziką išmanantis matematikas nebandys ginčytis, jog didesnė matematikos dalis yra tokiu būdu susijusi su fizika.*

Tai yra svarbiausio fizicizmo tezę pagrindžiančio argumento dalis.

Toliau pratęsdamas šį argumentą, R. Omnèsas teigia [2004, p. 94], kad matematinė rinkimo aksioma *be abejonės priklauso fizinės realybės kalbai.* Pagal jį, taip yra todėl, kad ši aksioma yra naudojama kvantinės mechanikos konstrukcijose. Remiantis fizicizmo teze, ši aksioma yra fizikos dėsnis. Todėl mūsų anksčiau aptartas Banacho–Tarskio paradoksas taip pat turėtų būti paaiškinamas teorinės fizikos kontekste. Apie šį paradoksą autorius savo knygoje neužsimena.

Tačiau apie ryšį tarp rinkimo aksiomos ir atomo branduolio fizikos rašo B. W. Augensteinas [1984]. Savo darbe jis parodo, kad fizikai reikalingų atomo branduolio dalelių savybės išplaukia iš Banacho–Tarskio paradokso teiginių. Taigi matematikoje paradoksu vadinamas teiginys neprieštarauja fizikos intuicijai. Priešingai, kitos paradoksaliai atrodančios matematinių objektų savybės gali tapti naujų fizinių reiškinių pranašais. Apibendrindamas savo rezultatus, Augensteinas teigia, kad fizikos argumentai pagrindžia rinkimo aksiomą jos stipriausia forma.

Apie matematikos ir fizikos santykius parašyta labai daug (žr. Boniolo, Budinich, Trobok [2005], Bolibruch, Osipov, Sinai [2006]). Vis dėlto, jei norima teigti kažką panašaus į fizicimą, tai tokios tezės pagrindimas turėtų būti žymiai stipriau argumentuojamas palyginti su R. Omnèsu ir B. W. Augensteinu. Šiuose santykiuose pirmoje vietoje turėtų būti aptariama intuityvioji ir matematinė kontinuumo samprata, nes šio klausimo sprendimas nulemia erdvės ir laiko sampratą fizikoje.

Intuityvusis kontinuumas. Fizikoje erdvė ir laikas paprastai yra viena ar kita matematinė konstrukcija. Pavyzdžiui, specialiojoje reliatyvumo teorijoje tam naudojama keturmatė Euklido erdvė su Minkowskio metrika. Todėl kalbant apie kontinuumą natūralu lyginti intuityviai suvokiamą kontinuumą su jo matematine samprata – realiųjų skaičių aibe. Intuityvioji samprata nėra vienareikšmė ir turi turtingą istoriją, ką rodo J. L. Bello apžvalga [2005], detaliau nagrinėjanti tik palyginti trumpą kelių šimtmečių laikotarpį. Tarp apžvalgos herojų yra ir H. Weylis, kurio knygoje *Das Kontinuum* [1918] predikatyvizmo kontekste realiųjų skaičių aibės kontinuumas lyginamas su intuityvia kontinuumo samprata. *Das Kontinuum* autorius teigia [1918, p. 108], kad

> *...matematikos sąvokų pasaulis taip skiriasi nuo mūsų intuityvios kontinuumo supratos, kad jų abiejų sutapimo reikalavimas turi būti atmestas kaip absurdiškas.*

Čia matematinis kontinuumas yra paties autoriaus konstruojama, pasitelkiant predikatyvizmo prielaidas, realiųjų skaičių aibė, ir šiuo požiūriu mažai besiskirianti nuo Dedekindo ir Cantoro realiųjų skaičių aibės sampratos. Svarbiausia matematinės konstrukcijos problema yra tai, kad kontinuumas, tapatinant jį su realiųjų skaičių aibe, yra sudarytas iš „diskrečių taškų“, nes aibę sudaro elementai. Prisiminkime, kad šiuolaikinis prieštaros tarp diskretumo ir tolydumo sprendimas matematikoje yra tolydumo suvedimas (redukcija) į diskretumą. Tuo tarpu intuityviai suvokiamas kontinuumas neturėtų turėti tokių diskrečių elementų. Kiti H. Weylio aptariami skirtumai susiję su fenomenologinės laiko sampratos niunansais.

Natūralu, kad siekimas suderinti (absurdiškai skirtingus pagal Weylį) matematinį ir intuityvųjį kontinuumus verčia problemos sprendimo ieškoti tarp alternatyvų matematinei aibių teorijai. Vieną tokių alternatyvų, jau anksčiau minėtą S. Leśniewskio mereologiją, savo 1990 m. disertaciniame darbe nagrinėjo L. Kulviecas [2007]. Šiame darbe lietuvių autorius pasiūlė savąjį laiko aksiominį apibrėžimą, remdamasis A. Tarskio sukurta apibendrintos mereologijos aksiomatika [1937] ir ją papildydamas.

Disertaciniame darbe L. Kulviecas detaliai ir nuosekliai nagrinėja teorinės mechanikos sąvokas įvairiais atžvilgiais. Vienu svarbiausių trūkumų jis mato laiko tapatinimą su realiųjų skaičių aibe, vadindamas tai laiko sąvokos aritmetizavimu. Dėl tokio tapatinimo, mechanikos požiūriu, atsiranda prieštaravimų tarp fizikinių dydžių, priklausančių nuo laiko. Tokios problemos buvo įvardytos ir anksčiau, bet iki šiol siūlomi problemų sprendimai nebuvo pakankamai radikalūs. L. Kulviecas atskiria laiko momentais vadinamus dydžius, suteikdamas jiems mereologinę struktūrą, nuo realiųjų skaičių aibės ir nagrinėja abipus vienareikšmes atitiktis tarp šių dviejų rinkinių išlaikančius tvarkos sąryšius. Šią struktūrą L. Kulviecas papildo intervalo tarp laiko momentų sąvoka. Šią visumą jis toliau naudoja apibrėžti pagrindinei mechanikos sąvokai – greičiui. Taigi šio skyrelio pradžioje apibūdinta šiuolaikinė greičio samprata gerokai pakeičiama suteikiant naujų galimybių realizuoti fizikinei intuicijai. Deja, ankstyva L. Kulvieco mirtis sutrukdė jam įtikinti kitus savo rezultatų svarba ir nauda.

Matematika ir kultūra

Kalbėdami apie matematiką ir mokslą praeitame skyrelyje, aptarėme tik vieną mokslo sritį – fiziką (dėl vietos ir laiko stokos). Kadangi žmogaus dvasinė kultūra yra dar platesnė sritis, tai matematikos ir kultūros santykių aptarimas atrodo beviltiškai sudėtingas. Tai iliustruoja ir tas faktas, kad nuo 2004 m. iki šiol yra išleistas M. Emmerio redaguojamas šešių tomų straipsnių rinkinys (iš viso 1735 puslapiai), skirtas matematikos ir kultūros santykiams aptarti. Atsižvelgdami į mūsų galimybes, čia pridursime tik keletą bruožų apie matematikos santykius su filosofija ir teologija šio rašinio kontekste.

Mūsų tikslas – parodyti matematiką tokią, kokia ji tapo per pastaruosius du šimtus metų, t. y. savarankiška bendriausių sąvokų tyrimo sritimi, naudojančia tik logiškai patikimus argumentus. Ji nepretenduoja į jokį kitą dažnai jai priskiriamą vaidmenį filosofijos ar religinio žinojimo kontekste. Istorijos eigoje matematika dažnai buvo nurodoma kaip patikimų žinių šaltinis, ypač antikos laikotarpiu. Šis vaidmuo pozityvistų buvo apverstas aukštyn kojomis gamtos mokslams priskiriant tikrojo žinojimo šaltinio vaidmenį, o matematikai paliekant jokio savarankiško turinio neturinčios kalbos vaidmenį. Tačiau šiuolaikinės teorinės fizikos situacija rodo, kad „tikrajam žinojimui“ matematika gali tapti vieninteliu gelbėjimosi ratu, jei visuomenė nebesutinka toliau finansuoti Didįjį Visatos sprogimą imituojantį eksperimentą Šveicarijoje ar kurioje nors kitoje šalyje.

Pozityvizmą pakeitęs postmodernizmas šluoja nuo kelio matematiką kartu su visu mokslu kaip racionalaus mąstymo tvirtovę. Kaip ir turėtų būti, kai nepaisoma racionalumo, matematika retkarčiais remiamasi postmodernistų darbuose. Šis reiškinys netgi inspiravo studiją, siekiančią parodyti, kad postmodernizmo šaknys yra matematikoje (Tasic [2001] ir recenzija Harris [2003]). Visiškai priešingas vaidmuo tenka matematikai (nepostmodernisto) prancūzų filosofo A. Badiou darbuose. Jo darbų esmę trumpai ir aiškiai apibūdino Hallwardas [2003] teigdamas, kad:

> *Badiou siekia „išgelbėti racionalumą nuo pozityvizmo, subjektą nuo dekonstrukcijos, būtį nuo Heideggerio, begalybę nuo teologijos, vyksmą nuo Deleuze, revoliuciją nuo Stalino, valstybės kritiką nuo Foucaulto,... ir meilės poreikį nuo Amerikos populiariosios kultūros. Jis kuria subjekto filosofiją be fenomenologijos, tiesos filosofiją be reliatyvizmo, vyksmo filosofiją be istoricizmo.*

Šioje filosofijoje matematikos vaidmuo yra nei didelis, nei mažas – tiesiog matematika yra ontologija, mokslas apie būtį (angl. *being*). Badiou savo knygoje *Being and Event* būtį tapatina su matematine aibės sąvoka, nes ši išreiškia du skirtingus būties aspektus: įvairovę (angl. *multiplicity*) – aibės elementai, ir vienatį (angl. *singularity*) – pati aibė. Aibių teorijos aksiomos išreiškia tiesos atsiradimą (angl. *event*) iš būties ir susieja būtį su subjektu, kuris gali būti mokslas, politika, menas ir meilė. Mūsų požiūriu, tai yra dar viena matematikos interpretacija (taikomoji matematika) naudojama filosofijoje, kuri yra galima tik todėl, kad matematika yra savarankiška mąstymo sritis.

Matematika kaip žmonių veiklos rūšis yra priklausoma nuo kultūrinio konteksto, kuriai savo ruožtu daro įtaką filosofija. Mūsų aptartus pokyčius matematikoje, įvykusius 1890–1930 m., matematikos istorikas J. Gray vertina kultūriniu požiūriu, suteikdamas jiems modernizmo vardą. Šį vardą jis vartoja iš esmės visuotinai kultūros istorijoje pripažinta prasme. Tiksliau, tokį vertinimą pagrindžiančioje savo knygoje [2008; p. 1] jis rašo, kad Modernizmas yra

autonominė idėjų visuma, mažai arba visai nesusieta su išore, išskirdama formalius veiklos aspektus ir su kasdieniniu gyvenimu turinti ne abejingus, o komplikuotus – tiksliau, susirūpinimu grindžiamus – santykius, kuri jungia žmonių grupę, susijusią profesiniu arba disciplininiu pagrindu ir labai rimtai vertinančią tai, ko siekia.

Kaip modernizmo pavyzdį kitose kultūros srityse J. Gray nurodo: tapyboje – kubizmą, muzikoje – Schoenbergo serializmą, literatūroje – naratyvinės formos atsisakymą (J. Joyceo *Ulisas*) ir charakterių psichologijos ryškinimą (R. Musilo *Žmogus be savybių*), poezijoje – S. Mallarmé, vėliau E. Pound ir T. S. Eliot.

Svarbiausiu to meto matematikos modernistiniu bruožu J. Gray [2008; p. 2] teigia esant jos tapimą mokslu apie sąvokas ir ne tiek dėl didesnio polinkio į abstrakcijas, kiek dėl didesnio nepriklausomumo ne tik nuo realaus pasaulio, bet ir nuo viso mokslo. Apie matematiką perėjimo į 20 a. laikotarpiu kitame savo darbe Gray [2006; p. 382] rašo:

[...] matematika daugiau nebuvo grindžiama primityviomis skaičiavimo ir matavimo operacijomis ir daugiau ji nebuvo idealizuotu, abstrakčiu ir paprastu mokslu. Ji atsiribojo nuo tokių dalykų. Matematikos objektai buvo apibrėžiami nepriklausomai nuo mokslo, ir jos metodai, natūralu, buvo skirtingi. Tai sudarė realų pagrindą matematiką vadinti modernizmu.

Matematika ir teologija. Aiškinant matematikos pokyčius, atsiradusius 16 ir 17 amžiais, įdomią idėją siūlo L. Kvaszo [2004] darbas. Autoriaus nuomone, monoteistinė teologija yra atsakinga dėl ontologijos atsiskyrimo nuo epistemologijos viduramžiais. Tuo tarpu antikinėje Graikijoje ontologija nesiskyrė nuo epistemologijos ta prasme, kad senovės graikai pasaulį laikė tokiu, koks jis jiems atrodė. Reiškinius, kurie jiems atrodė migloti ir neaiškūs, jie tokiais laikė esant iš tikrųjų ir todėl buvo beprasmiška juos suprasti. Savo požiūrį Kvaszas iliustruoja aptardamas penkias skirtingus reiškinius apibūdinančių sąvokų poras: *apeironas* – begalybė, *tyché* – atsitiktinumas, *arithmos* – nežinomasis, *kenón* – erdvė ir *kinesis* – judėjimas. Jis teigia, kad kiekvienoje poroje pirmoji sąvoka atitinka jos Helenistinį supratimą, o antroji kiekvienos poros sąvoka pradėta naudoti 16 a. ir savo turiniu yra žymiai siauresnė nei pirmosios sąvokos turinys. Tačiau kiekviena antroji poros sąvoka jau tampa matematine sąvoka. Tokiu būdu teologija netiesiogiai padėjo antikos laikais nesuprantamai sąvokai tapti matematikos tyrimo objektu.

Kvaszo idėja asocijuojasi su platonizmu matematikos filosofijoje ir su matematiniu Gamtos vertinimu Niutono ir Leibnizo laikais. Ši idėja turėtų būti grindžiama išsamiais argumentais toliau tiriant kultūrinę matematikos istoriją.

Šiame rašinyje bandyta parodyti, kaip matematika daro įtaką mokslui ir kultūrai, o kartu ir kritiniam mąstymui. Tariant, kad tautos brandą lemia jos narių gebėjimas kritiškai mąstyti, o ši žmogaus savybė priklauso nuo jo matematinio išprusimo, tai natūralu to siekti. Mūsų nuomone, matematinį Lietuvos visuomenės raštingumą lemia mažiausiai trys veiksniai:

- matematikos tyrimų išsivystymo lygis (tenkintis tokiu, kurio pakanka matematikos studijoms ar siekti aukščiausio lygio);
- matematikų pasiskirstymas pagal specializacijos sritis (gilinasi keliose nustatytose srityse ar siekia apimti kaip galima daugiau sričių);
- matematikų tyrėjų pasiskirstymas pagal institucijas (koncentruojasi vienoje institucijoje ar pasiskirsto po daugelį institucijų).

Nurodytose alternatyvose mes pasirinktume antruosius variantus. Tačiau pagrįsti tokį pasirinkimą reikėtų gerokai daugiau vietos ir laiko, nei turime. Todėl likusią rašinio dalį skirsime kitiems svarbiems klausimams, susijusiems su matematika Lietuvoje.

Matematikos raidą Lietuvoje išsamiai nušviečiančios istorijos neturime. Nors tokių planų būta, kaip rašoma knygos *Matematika Lietuvoje po 1945 metų* pratarmėje:

> *Jau seniai kilo sumanymas parengti pakankamai išsamią Lietuvos matematikos istoriją. Tai – didelis ir sunkus darbas. Jaunesnieji matematikai, užsiėmę savo kūrybine veikla, neranda laiko įsitraukti į šį darbą. Iškreipti mokslinės veiklos vertinimo kriterijai jų ir neskatina.* [Kubilius; 2006, p. 7]

Nurodytos aplinkybės nesikeičia. Kol kas turime minėtą straipsnių rinkinį, kuriame supažindinama su pagrindiniais Lietuvos matematikų gautais moksliniais rezultatais. Trumpai matematikos mokslas Lietuvoje apžvelgtas E. Manstavičiaus ir H. Pragarausko [2007] straipsnyje. Matematikos raidos Lietuvoje istoriniai aspektai aprašomi A. Ažubalio [1997], J. Kubiliaus [2001], J. Banionio knygose [1994] ir [2006] ir straipsnių rinkiniuose [Riauba; 2009], [Kubilius; 2009].

Matematikos tyrimai atliekami visuose Lietuvos universitetuose lygiagrečiai su matematikos studijomis. Dauguma matematikų tyrėjų sutelkti Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete. Panašus matematikų potencialas buvo Matematikos ir informatikos institute prieš jį prijungiant prie to paties VU, kaip rodo 2009 m. ŠMM ir LMT užsakymu atlikta studija [Studija; 2009]. Dėl istorinių aplinkybių dauguma matematikų dirba skaičių teorijos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos srityse. Taip pat vystomos funkcijų teorija, diferencialinių lygčių teorija, jų skaitinio sprendimo metodai ir matematinė logika.

Nuo 1959 m. kiekvienais metais vyksta Lietuvos matematikos konferencijos. 1962 m. įkurta Lietuvos matematikų draugija. 1983 m. įsteigtas Lietuvos matematikos muziejus. Lietuvoje ypač aktyvi jaunųjų matematikų rengimo sistema: matematikos olimpiados, neakivaizdinė matematikos mokykla, stovyklos jauniesiems matematikams, individualus darbas su gabiais studentais. Nuo 1973 m. iki šiol kas ketveri metai Vilniuje vyksta Tarptautinė tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencija.

Lietuvos matematikai leidžia tris mokslinius žurnalus: *Lithuanian Mathematical Journal* (nuo 1961 m.), *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control* (nuo 1996 m.) ir *Mathematical Modelling and Analysis* (nuo 1996 m.). Pastarieji du žurnalai orientuoti į matematikos taikymus. Jie taip pat rodo, kad Lietuvos matematikai mokslinių tyrimų srityje bendradarbiauja su gamtos mokslų atstovais. Nėra požymių, kad matematikai rimčiau bendrautų su socialinių ir humanitarinių mokslų atstovais. Bendradarbiavimo nėra netgi su ekonomistais, nors teorinė ekonomika grindžiama šiuolaikine matematika. Praėjo per daug laiko, kad tokią padėtį galima būtų teisinti ankstesniu Lietuvos priklausimu socializmo sistemai. Lietuvoje buvusi lošimų teorijos mokykla išnyko. Nėra pastebimo bendradarbiavimo su filosofais ir lingvistais. Be abejo, tam yra daug priežasčių, apie kai kurias iš jų rašome straipsniuose R. Norvaiša [2009] ir [2010].

Visuomenės matematinį švietimą sudaro ikimokyklinis, pradinis ir vidurinis matematikos gebėjimų ugdymas, aukštasis ir universitetinis matematinis švietimas, matematikos olimpiados bei matematikos populiarinimas. Sprendžiant pagal Banionio [1994] surinktą medžiagą tarpukario Lietuvoje buvo nemažai matematikų, populiariai rašančių apie matematiką P. Dovydaičio 1920 m. įsteigtame žurnale *Kosmos*. Sovietiniais laikais turėjome daugybę knygų lietuvių kalba, skirtų matematikai populiarinti, tarp jų 1970–1987 m. buvo išleistos net 27 serijos *Matematikos mokykla* knygos.

Tačiau palyginti nebloga matematikos sklaida pasikeitė Lietuvai tapus nepriklausoma valstybe. Vienintelis žmogus, šiuo laikotarpiu populiariai rašęs visuomenei apie matematiką, buvo A. Baltrūnas (*Nuo nulio iki* ..., 1991 m.; *Begalybės biografija,* 2004 m.), kurio nebėra. Išskyrus P. Tannenbaumo ir R. Arnoldo *Kelionės į šiuolaikinę matematiką*, 1995 m. (išleista Atviros Lietuvos fondui parėmus), daugiau nėra ir verstinės matematinio švietimo literatūros. Tik iki 2003 metų turėjome matematikos populiarinimo žurnalą *Alfa plius Omega*, kuris gyvavo jo redaktoriaus V. Stakėno entuziazmo dėka. Kita su matematika susijusi literatūra yra metodinė ir monografijos, t. y. literatūra, skirta studijuojantiems matematiką.

Tuo tarpu pastaruoju dešimtmečiu atsirado kelios dešimtys skirtingų pavadinimų knygų, skirtų numerologijai. Net knygų apie numerologiją autoriai stebisi mūsų visuomenės milžinišku tokios literatūros poreikiu. Yra paklausa, bus ir pasiūla. Matyt, P. Dambrauskas buvo teisus, sakydamas:

> *Matematika yra tiek prieinama plačiajai visuomenei, kiek ji pati yra matematiškai išsimokslinusi.* (cit. pagal [Banionis; 1994, p. 112])

Visuomenės matematinį išprusimą iliustruoja mitai, išvardyti rašinio įvade. Kita iliustracija būtų toks matematikos apibūdinimas oficialiame leidinyje:

> *matematika [...] – mokslas, tiriantis realaus pasaulio kiekybinius santykius ir erdvines formas, t. p. sąryšius tarp abstrakčių logiškai įmanomų objektų, gautų daugialaipsnio apibendrinimo ir idealizacijos būdu iš tikrovės reiškinių analizės (dažniausiai kiekybinės).* [Lietuviškoji tarybinė enciklopedija, t. 7, Vilnius, leidykla *Mintis*, 1981, p. 308]

Panašus požiūris į matematiką formuojamas ir vidurinėje mokykloje:

> *…matematinės sąvokos yra realaus pasaulio esminių savybių, formų ir kiekybinių santykių atspindys žmogaus sąmonėje.* [Ažubalis; 2008, p. 61]

Šiuose apibūdinimuose matematikai vienareikšmiškai priskiriamas realaus pasaulio atspindžio vaidmuo.

Matyt, nereikia didelio įžvalgumo nuspėti tokio požiūrio šaltinį. Pakanka prisiminti dialektinio materializmo paskaitas, kurias man dar teko klausyti. Tai patvirtina ir Kline knygos [1985] vertimo į rusų kalbą redaktorių knygos pristatymas 1988 m. Jame vienintelė kritikos strėlė nukreipta į autorių nuomone knygoje esamą matematikos vaidmens fizikoje išaukštinimą. Štai kas ten rašoma:

> *Suprasdami ir pritardami polemiškam užaštrinimui, kaip kvietimą diskusijai, mes vis dėlto negalime sutikti su autoriumi, kai jis – kad ir dėl polemikos aštrumo – iki tokio laipsnio iškelia matematikos vaidmenį fizikoje, kad praktiškai visi gamtotyros atstovai, pradedant klasikiniu periodu, Galileo epocha, ir baigiant šiais laikais, iš fizikų ir kitų gamtos mokslininkų pas jį tampa grynaisiais matematikais. Vargu ar pasitarnausime matematikai, jei be saiko ją aukštinsime kitų mokslo disciplinų ir metodų sąskaita. Be abejonės, čia mes turime galvoje eksperimentą, kurio funkcinė „simbiozė“ su matematika mokslinio pažinimo sistemoje galiausiai ir užtikrino dabar stebimą nuostabų fizikos vystymosi progresą.* [...]

Dialektinio materializmo daugiau matematikams neskaitome. Bet vietoje jo matematikos filosofijos neskaitome taip pat. Gal todėl visuomenė ir domisi numerologija, astrologija, chiromantija ir daugeliu kitų įdomių dalykų, bet ne matematika.

Platesnio matematinio švietimo nebuvimu galima paaiškinti tai, kad iki šiol per matematikos disertacijų gynimą tenka išgirsti klausimą: „o kokie jūsų rezultatų taikymai praktikoje?“. Tuo tarpu iš kitų mokslų atstovų, dalyvaujančių svarstant matematikų disertacijas, tenka girdėti nusistebėjimą, kad tose disertacijose nėra nieko vertingo, tik įrodymai.

Matematikos supratimas visuomenėje yra suformuotas mokyklinės programos, kuri iš esmės atspindi matematiką, gyvavusią tik iki 18 a. Pirmo kurso matematikos studentai universitete pradeda savo studijas įsisavindami 19 a. matematikos pagrindus; dauguma matematikos studentų tuo ir baigia savo pažintį su matematika. Kaip matėme, būtent 19 a. vidurys žymi didžiausius ir svarbiausius matematikos pokyčius, kurių pasekmė yra šiuolaikinė matematika.

Gali būti, kad vidurinės mokyklos matematikos turinio ir universitetinio matematikos kurso turinio skirtumas yra panašus į tą, kurį išreiškia perėjimas nuo formulėmis grindžiamos matematikos prie sąvokomis grindžiamos matematikos. Tai patvirtina kai kurių mokytojų požiūris, kad mokyklinei matematikai pakanka išraiškos sąvokos ir visai nereikia funkcijos. Galima numanyti, kokių sunkumų sukelia moksleiviui pradėjus klausyti universitetinį kursą, kurio turinį sudaro teoremos, palyginančios matematines sąvokas – tai didelis mąstymo šuolis. Matyt, jis yra būtinas, bet kyla klausimas, ar imamasi adekvačių priemonių padėti studentui tą perėjimą įveikti.

Mūsų nuomone, vidurinėse mokyklose dėstant matematiką būtina atsižvelgti į tai, kokia yra matematika šiandien. Tai reikštų abstrakčių sąvokų formavimo elementų ir matematinio įrodymo pradmenų diegimą mokyklinėje matematikoje. **Manome, kad Lietuvos akademinės bendruomenės pirmaeilis uždavinys yra vidurinės mokyklos matematikos programos pertvarkymas atsižvelgiant į matematikos pokyčius, įvykusius nuo 19 a. vidurio.**

Konkrečios rekomendacijos:

- Atlikti sociologinį tyrimą, rodantį, kaip visuomenė supranta matematiką.
- Persvarstyti mokyklinės ir universitetinės matematikos kursų turinius palyginant juos sąvokomis grindžiamos matematikos požiūriu.
- Skatinti profesionalius Lietuvos matematikos istorijos tyrimus, matematikos filosofijos tyrimus ir matematikos populiarinimo darbus.
- Atgaivinti žurnalą, skirtą matematikai populiarinti.
- Mokslų klasifikacinėje sistemoje išskirti matematiką į atskirą mokslų sritį.

Cituojama literatūra

- Aspray, W., Kitcher, P. (eds) (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics.* University of Minnesota Press, 278–292.
- Arnold, V. I. (2005). Mathematics and Physics. In: Boniolo, Budinich, Trobok [2005].
- Atiyah, M. et al. (1994). Responses to "Theoretical Mathematics": Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 178–207.
- Augenstein, B. W. (1984). Hadron physics and transfinite set theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 23(12), 1197–1205.
- Ažubalis, A. (1997). *Iš Lietuvos matematinio švietimo praeities*. Kaunas.
- Ažubalis, A. (2008). *Logika ir mokyklinė matematika*. Vilnius. http://www.lka.lt/EasyAdmin/sys/files/Logika_internetui_1.pdf .
- Badiou, A. (2005). *Being and Event* (vert. iš prancūzų) Continuum.
- Banionis, J. (1994). *Matematikos mokslo raida Lietuvoje 1920–1940 m*. Matematikos ir informatikos institutas.
- Banionis, J. (2006). *Matematinė mintis Lietuvoje. Istorinė apžvalga: 1832–1990 m*. Vilniaus pedagoginis universitetas.
- Bell, J. L. (2005). Divergent conceptions of the continuum in 19th and early 20th century mathematics and philosophy. *Axiomathes*, 15, 63–84.
- Berkeley, G. (1734). *The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. London. D. R. Wilkinso interneto svetainėje http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst .
- Biržiška, V. (1952). Matematika. *Aidai*, 2 vasaris, 74–82.
- Bolibruch, A. A., Osipov, Yu. S., Sinai, Ya. G. (eds) (2006). *Mathematical Events of the Twentieth Century*. (transl. from Russian). Springer.
- Boniolo, G., Budinich, P., Trobok, M. (eds) (2005). *The Role of Mathematics in Physical Sciences. Interdisciplinary and Philosophical Aspects*. Springer.
- Browder, F. E. (1988). Mathematics and the Sciences. In: Aspray, Kitcher [1988].
- Bumblauskas, A. (red.) (2009). *Alma Mater Vilnensis: Vilniaus universiteto istorijos bruožai*. Vilniaus universiteto leidykla.
- Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. *Première partie*: *Analyse Algébrique*; repr. Bologna: Editrice Clueb, 1990.
- Crowe, M. J. (1988). Ten misconceptions about mathematics and its history. In: Aspray, Kitcher [1988].
- Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press.
- Emmer, M. (ed) (2011). Mathematics and Culture. Vol. I–VI. Springer, 2004–2011.
- Enzensberger, H. M. (1999). Drawbridge Up. Mathematics – A Cultural Anathema. AK Peters.
- Faddeev, L. D. (2006). What modern mathematical physics is supposed to be. In: Bolibruch, Osipov, Sinai [2006].
- Feferman, S. (1998). *In the Light of Logic*. Oxford University Press.
- Feferman, S. (2009). Conceptions of the Continuum. *Intellectica*, 51, 169–189.
- Ferreirós, J. (1996). Traditional Logic and the Early History of Sets, 1854–1908. *Archive for History of Exact Sciences*, 50, 5–71.
- Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Second revised edition. Birkhäuser.
- Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*. In: J. van Heijenoort (Ed.). From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Harvard University Press, 1967, pp. 1–82.
- Frege, G. (1884). *Foundations of Arithmetic*. Trans. J. L. Austin, second edition, Oxford, 1980.
- Gödel, K. (1944). Russell's mathematical logic. *The Philosophy of Bertand Russell*, 125–153. Repr. in *Philosophy of Mathematics*. Selected readings. Eds. P. Benacerraf and H. Putnam, 1983, 447–469.
- Gowers, T. (ed) (2008). *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton University Press.
- Gray, J. (2008). *Plato's ghost: the modernist transformations of mathematics*. Princeton University Press.
- Greenberg, M. (2007). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*. 4th edition. W. H. Freeman and Company, New York.
- Hallward, P. (2003). *Badiou*: *A Subject to Truth*. Univ. of Minnesota Press.

- Harris, M. (2003). Postmodern at an early age. *Notices of the American Mathematical Society*, 50, 790–799. http://www.ams.org/notices/200307/rev-harris.pdf .
- Harris, M. (2008). “Why Mathematics?“ You Might Ask. In: Gowers [2008].
- Jaffe, A., Quinn, F. (1993). “Theoretical mathematics“: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29, 1–13.
- Jech, T. J. (2008). *The axiom of choice*. Dover Publications.
- Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.
- Kline, M. (1985). *Mathematics and the search for knowledge*. Oxford University Press.
- Kubilius, J. (2001). *Antanas Baranauskas ir matematika* (Iš Lietuvos matematikos istorijos – 1). Vilnius, MII, 92 p.
- Kubilius, J. (red.) (2006). *Matematika Lietuvoje po 1945 metų* (Iš Lietuvos matematikos istorijos – 2). Vilnius, MII, 352 p.
- Kubilius, J. (red.) (2009). *Matematinė mintis Lietuvoje* (Iš Lietuvos matematikos istorijos – 3). Vilnius, MII, 173 p.
- Kulviecas, L. (2007). Laiko sąvoka klasikinėje mechanikoje. (Rusų kalba) Vilnius.
- Kvasz, L. (2004). The invisible link between mathematics and theology. *Perspectives on Science and Christian Faith*, 56 (2), 111–116.
- Laugwitz, D. (2008). *Bernhard Riemann 1826–1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*. (Transl. from German). Birkhäuser.
- Leśniewski, S. (1916). Podstawy ogólnej teoryi mnogości. I, Moscow. Engl. transl.: Foundations of the General Theory of Manifolds. I, in S. Leśniewski, Collected Works. Kluwer, 1992, vol. 1, 129–173.
- Maddy, P. (2008). How applied mathematics became pure. *Review of Symbolic Logic*, 1, 16–41.
- Manstavičius, E. Pragarauskas, H. (2007). Matematika Lietuvoje. *Visuotinė lietuvių enciklopedija*, t. 12. Vilnius, pp. 637–641.
- Manin, I. Yu. (2007). Interrelations between Mathematics and Physics. In: *Mathematics as Metaphor* (Collected Works). AMS.
- Moore, G. H. (1982). *Zermelo’s Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. Springer.
- Norvaiša, R (2008). Matematika. *Visuotinė lietuvių enciklopedija*, t. 14. Vilnius, 421–425.
- Norvaiša, R. (2009). Matematika, visuomenė ir mokslo politika. *Mokslas ir technika* Nr. 11, 32–33 ir Nr. 12, 30–31.
- Norvaiša, R. (2010). Požiūris į mokslą ir akademinės veiklos vertinimas. *Mokslo Lietuva*, Nr. 11, birželio 3 d.
- Omnès, R. (2005). *Converging realities: toward a common philosophy of physics and mathematics*. (Transl. from French) Princeton University Press.
- Riauba, B. (2009). Straipsniai leidinyje: Bumblauskas [2009].
- Smolin, L. (2007). *The Trouble with Physics. The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next*. A Mariner Book.
- Solovay, R. M. (1970). A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Annals of Mathematics*, 92, 1–56.
- Sørensen, H. K. (2002). *Abel’s mathematics and the rise of concepts*. An extract from “The mathematics of Niels Henrik Abel. Continuation and New Approaches in Mathematics During the 1820s“. PhD Dissertation, University of Aarhus Denmark.
- Steiner, M. (1998). *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Harvard University Press.
- Studija (2009). Informatikos ir informacinių technologijų mokslo centro steigimo poreikio ir galimybių studija. Lietuvos mokslo taryba.
- Tarski, A. (1937). An alternative System for P and T. – in J. Woodger. *The Axiomatic Method in Biology*. Cambridge University Press, Appendix E.
- Tasic, V. (2001). *Mathematics and the Roots of Postmodern Thought*. Oxford University Press.
- Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 161–177.
- Wagon, S. (1994). *The Banach–Tarski Paradox*. Cambridge University Press.
- Weyl, H. (1987). *Das Kontinuum*. Leipzig, 1918. Engl. transl.: *The Continuum. A Critical Examination of the Foundations of Analysis*. Dover Publications.
- Wigner, E. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13, 1–14.
- Witten, E. (1998). Magic, Mystery, and Matrix. *Notices of the American Mathematical Society*, 45, 1124–1129.
- Woit, P. (2006). *Not Even Wrong. The Failure of String Theory and the Search for Unity in Physical Laws*. Basic Books.